

Það heitir **þríhljómur** í C-dúr þegar C-, E- og G-nótur eru slegnar saman. Þríhljómur í F-dúr myndast þegar F-, A- og C-nótur eru slegnar saman. Við fyllum út töflurnar fyrir þessa þríhljóma hér á eftir og reiknum hlutföllin í síðari dálkunum.

C	E	G	E : C	G : C
65,406	82,407	97,999	1,260	1,498
130,81	164,81	196,00	1,260	1,498
261,63	329,63	392,00	1,260	1,498
523,25	659,26	783,99	1,260	1,498
1046,5	1318,5	1568,0	1,260	1,498

F	A	C	A : F	C : F
43,654	55,000	65,406	1,260	1,498
87,307	110,00	130,81	1,260	1,498
174,61	220,00	261,63	1,260	1,498
349,23	440,00	523,25	1,260	1,498
698,46	880,00	1046,5	1,260	1,498

Dæmin hér að framan vekja grun um að samhengi sé á milli talna og tóna. Markmiðið með þessari grein er að fræðast ofurlítið um hvaða skýringar á talnamynstrunum má finna í hljóðfræðinni og um uppruna tónfræðinnar.

Tónfræði Pýþagórasar

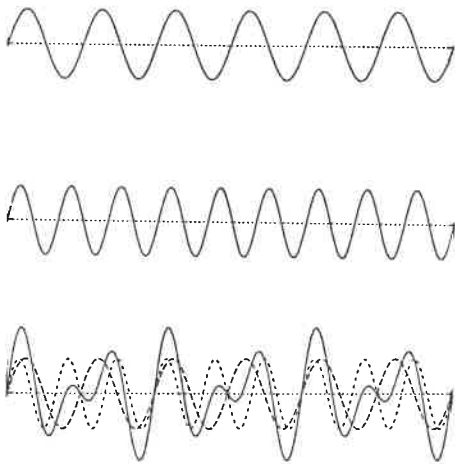
Tónlist hefur löngum fylgt mannum. Fólk hefur leikið á einföld hljóðfæri eftir eyranu og sungið eins og tilfinningin bauð frá ómunatíð. Fræðigreinin tónfræði á sér þó rætur allt aftur á 6. öld f. Kr. Gríski spekingurinn Pýþagóras og lærisveinar hans mynduðu skóla þar sem menn veltu fyrir sér margvíslegum spurningum. Segja má að þeir hafi látið flest milli himins og jarðar til sín taka, en sem dæmi má nefna stærðfræði, tónlist, trúmál, stjórnmál og mataræði. Grunnurinn að öllum athugunum þeirra voru tölur, fyrst og fremst tölurnar 1, 2, 3 og 4, sem þeir nefndu fernd (tetractys).

Pýþagóringar, en svo nefndist þessi hópur, höfðu tekið eftir því að þægilegur samhljómur myndaðist, þegar slegnir voru saman jafngildir og jafnþandir strengir í ákveðnum lengdarhlutföllum, en aðrir tónar hljómuðu illa saman. Samhljómar komu fram þegar hlutföllin milli lengdanna voru 1:2, 1:3, 1:4, 2:3 og 3:4, en það voru einmitt öll hugsanleg hlutföll milli talnanna í ferndinni 1, 2, 3 og 4.

Auðvelt er að skýra hvers vegna tónar frá strengjum í þessum hlutföllum hljóma svo vel saman. Þegar þannig strengur er sleginn, sveiflast hann háttbundið og loftið tekur að sveiflast með. Sveiflan verður eins konar bylgjuhreyfing. Bylgjulengdin stendur í réttu hlutfalli við lengd strengsins. (Bylgjulengd telst lengdin milli samsvarandi staða á bylgjunni, t.d. frá bylgjutoppi til bylgjutoppis). Ef hlutfallið milli lengda strengjanna er 2:3 verður hlutfallið milli bylgjulengdanna líka 2:3.

Hér er sýnt hvernig tvær bylgjur, þar sem hlutfallið milli bylgjulengdanna er 2:3, liðast saman og mynda nýja háttbundna bylgju, svolítið flúráðri en upphaflegu bylgjurnar.

Á efri myndinni er lengd einnar bylgju 3 m, en á neðri myndinni 2 m:



Nýja bylgjan táknar samhljóm hinna tveggja. Samhljómurinn heitir **fimmund**.

Tvær bylgjur með bylgjulengdarhlutfallið 3:4 liðast saman á svipaðan hátt. Sá samhljómur heitir **ferund**.

Pegar hlutfallið milli bylgjulengdanna er 1:2 nefnist samhljómurinn **áttund**. Þá gengur lengd annarrar bylgjunnar tvisvar upp í lengd hinnar:

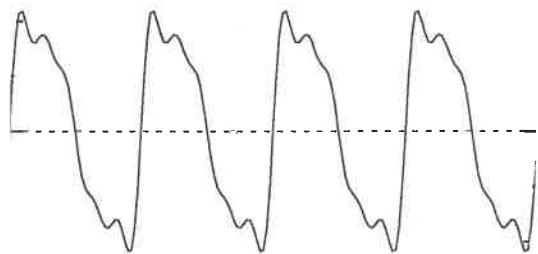


Pegar karlar og konur syngja saman sömu laglínuna munar venjulega einni áttund á tónhæð þeirra. Sagt er að þau syngi sama tóninn í mismunandi áttundum.

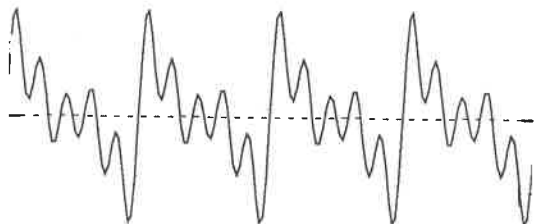
Samhljómur heyrst einnig við hlutföllin 1:3 og 1:4. Það er skiljanlegt út frá því sem sagt er um áttundarhlutfallið 1:2. Lengdir styttri bylgna ganga upp í bylgjulengd þeirrar lengstu. Í tónfræðinni heitir lengsta hljóðbylgjan **grunntónn**, bylgjan í hlutfallinu 1:2 fyrsti **yfirtónn**, 1:3 annar yfirtónn og 1:4 þriðji yfirtónn. Allir þessir tónar hljóma vel saman.

Í raun er það svo að fá hljóðfæri mynda hreina grunntóna, heldur er tónninn flétta af grunntóni og yfirtónum hans í mismunandi styrkleikahlutföllum eftir hljóðfærum. Bylgja tóns frá fiölu fær annað flúr en bylgja sama tóns frá píanói, enda þekkja allir þessi hljóð í sundur. Samt er þetta „sami tónninn“ í þeim skilningi að bylgjulengd grunntónsins er sú sama. Hljóðbylgjur þessar má skoða í sveiflusjám og það er hægt að líkja eftir þeim í hljóðgerflum. Hér eru myndir af bylgjunum frá þessum hljóðfærum:

Píanó:



Fiöla:



Í hljóðgerflum er hægt að búa til hreina grunntóna, og sónninn í símtóli er til dæmis hreinn A-tónn. Tónar úr hljóðgerflum þykja þó vélrænir og lítt áhugaverðir. Af hljóðfærum gefur óbó frá sér tiltölulega hreinan grunntón.

Tíðni

Pýþagóringar mældu lengdir strengja, sem gáfu frá sér tóna, og þar með bylgjulengdir þessara tóna, en nú er fremur talað um **tíðni** tónanna. Tíðni hljóðs er mæld í bylgjum eða sveiflum á sekúndu, einnig nefnt rið eða Hertz (Hz). Eyrað, sem nemur hljóðið, skynjar hversu margar hljóðbylgjur skella á því á tímæiningu. Sami tónn hefur alltaf sömu tíðni, en bylgjulengd hans getur verið breytileg, þar sem hljóðhraði í lofti er breytilegur eftir hitastigi.

Tíðnihlutfall er öfugt við hlutfallið milli bylgjulengda. Tökum dæmi: Hljóðhraði í lofti við 0°C er um 330 m/s. Þegar lengd bylgju er 2 m er tíðnin 165 sveiflur á sekúndu. Á sama hátt er tíðni 3 metra langrar bylgju 110 sveiflur á sekúndu. Tíðnihlutfallið milli 2 m og 3 m langra bylgna er $165:110 = (3 \cdot 55):(2 \cdot 55) = 3:2$. Hlutfallið snýst við.

Tíðnihlutfall fimmundar er þá 3:2, og ferundar 4:3, öfugt við lengdarhlutföllin, sem áður var talað um.

Ef athuguð eru tónsvið hinna ýmsu sönggradda eins og þau eru sýnd á myndinni af hljómborðinu fremst í greininni, sést að tíðni A-tónsins á miðju raddsviði sópranraddar er tvöföld tíðni A-tónsins á miðju raddsviði tenórraddar. Munurinn á þeim er ein áttund.

Bæði karla- og kvennaraddir ná venjulega yfir nokkrar áttundir og af myndinni má sjá að bassi og sópran geta sungið saman

þannig að muni þremur áttundum.

Fleira má skoða á hljómborðinu. Tónninn A hefur tíðnina 440 og tónninn E er fimmund hærri en A þannig að tíðni E ætti að vera $440 \cdot (3:2) = 660$, en á hljómborðinu er tíðnin 659,26, sem lætur mjög nærri.

Tónstigi Pýþagóringa

Fáir menn hafa slíkt tóneyra að þeir geti greint tíðni einstaks tóns, heldur skynja menn **tíðnihlutfallið** milli tveggja tóna. Munurinn, sem menn finna, er **hlutfallslegur munur**. Við hækkun um fimmund skella 50% fleiri bylgjur en áður á eyranu á hverri tímæiningu. Eyrað er næmt fyrir slíkri breytingu, en skortir viðmiðun þegar um einstakan tón er að ræða.

Það er því í samræmi við skynjun eyrans að munur á tónhæð eða svokallað **tónbil** er tíðnihlutfall, en í stærðfræði er orðið bil venjulega notað um mismun.

Pýþagóringar reiknuðu hlutfallið milli fimmundar og ferundar, $(3:2):(4:3) = 9:8$ og völdu það sem tónbileiningu. Þá varð til tónstigi sem svipar til þess, sem nú er nefndur C-dúr. Hlutföllin eru öll miðuð við fyrsta tóninn, C:

C	D	E	F	G	A	H	C
1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

Í þessum tónstiga eru 8 tónar. Tíðnihlutfall áttunda og fyrsta tónsins er 2:1 og þetta tónbil er nefnt **áttund**. Þetta skýrir líka hvers vegna 3:2 nefnist **fimmund**, hlutfallið milli fimmta og fyrsta tóns. Milli fjórða og fyrsta tóns er hlutfallið 4:3 og tónbilið er nefnt **ferund**. Ferundinni C-F er skipt í þrjú

bil, tvö heil tónbil og eitt styttra, og bilinu frá fimmund til áttundar G-C á sama hátt. Bilið milli F og G er heilt tónbil, 9:8, eins og áður var sagt.

Þegar grannt er skoðað eru öll hlutföllin veldi af tölunum 2 og 3, en 2 og 3 mynda ásamt 1 og 4 fernðina (tetractys). Þessar tölur höfðu sérstöðu í heimsmynd Pýþagóringa. Til dæmis tileinkuðu þeir körlum töluna 3 og konum töluna 2 og þar með varð 5 tala hjónabandsins.

Eins og áður var minnst á er hlutfallið 9:8 heilt tónbil, en $9:8 = 3^2:2^3$.

Þriðji tónninn, E, er heilu tónbili frá öðrum tón, D. Tónbil hans frá fyrsta tóninum, C, reiknast $(9:8) (9:8) = 81:64$ eða $3^4:2^6$.

6. og 7. tónn eru reiknaðir á sama hátt.

6. tónninn, A, er 9:8 af fimmta tóninum G. Ef við reiknum 9:8 af 3:2 fæst $(9:8) \cdot (3:2) = 27:16$.

Á sama hátt er sjöundi tónninn, H, 9:8 af sjötta tóninum, A, þ.e. H er 9:8 af 27:16 eða $(9:8) \cdot (27:16) = 243:128$.

Bilin milli þriðja og fjórða tóns, E og F, og milli sjöunda og áttunda tóns, H og C, eru styttri en hin.

Hlutfallið milli fjórða og þriðja tóns, $(4:3):(81:64) = 256:243$, og hlutfallið milli áttunda og sjöunda tóns, $(2:1):(243:128) = 256:243$. Af þessu má sjá að stuttu tónbilin eru eins, $256:243 \approx 1,053$. Þetta er stundum nefnt **hálf tónbil**.

Tvö hálfbil, 256:243, eru nokkuð nærri því að vera heilt tónbil, 9:8, þar sem $(256:243)^2 \approx 1,110$ en $9:8 \approx 1,125$. Það skýrir nafngiftina hálf tónbil.

Reiknuð bil, þar sem hlutföllin eru milli

hárra talna, hljóma ekki vel. Þetta á t.d. við um þrúndina 81:64 og sexundina 27:16. Það má skilja út frá bylgjumynstrum hlutfalla lágu talnanna, fimmundar 3:2 og áttundar 2:1. Stundum var haft á orði að tónstiginn væri aðallega fyrir stærðfræðinga, en ekki söngvara. Hvað var þá eftirsóknarvert í tónstiga Pýþagórasar?

Meginhugmynd að baki tónstigans mun hafa verið sú að halda hreinum fimmundum.

Athugum tónbilið D-A og reiknum $(27:16):(9:8) = 3:2$. Hér er komin fimmund.

Sama er að segja um tónbilið E-H. $(243:128):(81:64) = 3:2$. Önnur fimmund.

Fleiri fimmundartónbil er að finna í tónstiga Pýþagóringa, t.d. F-C.

Á sama hátt má reikna út nokkur ferundartónbil í tónstiganum, svo sem D-G og E-A.

Náttúrlegur tónstigi

Átta tóna tónstigi hefur verið undirstaða vestrænnar tónlistar allar götur frá tímum Pýþagóringa, en tónbilin hafa breyst. Þegar í fornöld voru til margvísleg afbrigði af tónstiganum til þess að hann hljómaði betur. Sér í lagi voru gerðar lagfæringar á þrúndabili milli tóna, en það hefur aftur í för með sér röskun annarra bila. Svokallaður náttúrlegur tónstigi með hreina þrúnd, ferund, fimmund og áttund er þannig í C-dúr:

C	D	E	F	G	A	H	C
1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1

Munurinn á þessum tónstiga og tónstiga Pýþagórasar liggur aðallega í þríundinni, sem er óþýðari í náttúrlega tónstiganum en í tónstiga Pýþagórasar.

Þríundin er $5:4 = 80:16$ í náttúrlega tónstiganum, en $81:16$ hjá Pýþagórasí.

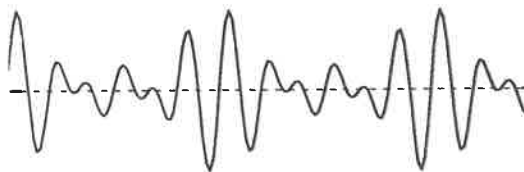
E-A verður áfram $4:3$ og E-H hrein fimmund, $3:2$, en við það breytist hlutfall A og H við grunntóninn C. Þannig verður sexundin C-A $5:3 = 25:15$ í náttúrlegum tónstiga en $27:16$ í tónstiga Pýþagórasar.

Hlutföllum milli lágra talna eins og $5:4$ og $5:3$ fylgja óþýðari samhljómar heldur en hlutföllum milli hárra talna eins og koma fyrir í tónstiga Pýþagóringa. En í náttúrlega tónstiganum eykst vandinn, sem fylgdi einnig tónstiga Pýþagórasar, að hann helst ekki hreinn ef skipt er um tóntegund og annar tónn en C er valinn sem grunntónn. Þetta stafar af því að heilu tónbilin eru misstór og hálfu tónbilin eru ekki nákvæmlega helmingur af heilu tónbili.

Þessi tónstigi fyrir dúr einkennir alla vestræna tónlist frá því um 1600 og fram til 1900. Í honum má leika **þríhljóm**. Þá eru fimmund og þríund leiknar með grunntóni:

Hlutföllin milli $3:2$, $5:4$ og $1:1$, fimmundar, þríundar og grunntóns, má lengja og sameina í $6:5:4$. Þessir tónar hljóma þægilega saman í eyrum manna. Minnst var á þríhljóm í upphafi þessarar greinar, þar sem komu fram hlutföllin $1,5:1,25:1$.

Hér sést hvernig bylgja myndast þegar bylgjur grunntóns, þríundar og fimmundar sameinast:

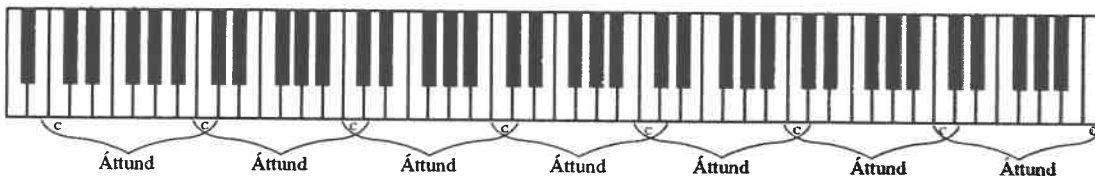


Áhugavert er að bera tónstigana betur saman. Meginhugmynd Pýþagóringa var eins og áður segir að halda fimmundum hreinum. Prófum að reikna tónbil milli annarra tóna í tónstiganum.

Tónbilið F-C, $(2:1):(4:3) = 3:2$, er einnig fimmund í náttúrlega tónstiganum, en D-A, $(5:3):(9:8) = 40:27$, er ekki lengur hrein fimmund.

Önnur fimmundarbil haldast hrein, svo sem E-H og C-G.

Sum tónbil geta verið mismunandi eftir tónstigum, en í öllum tónstigum er áttund hlutfallið $2:1$. Hægt er að bæta fleiri áttundum við tónstigann. Það sést þegar myndin af hljómborði pianósins er skoðuð betur. Áttundi tónninn er fyrsti tónninn í næstu áttund fyrir ofan. Sömuleiðis getur fyrsti tónninn verið áttundi tónninn í næstu áttund fyrir neðan.



Hvert C tilheyrir tveimur áttundum.

Jafnbilatónstigi

Pýpagóringar reyndu að skipta heilu tónbilunum í hálf bil þannig að alltaf mætti halda hreinum fimmundum, þegar skipt væri um tóntegund og upphafstónninn væri annar en C. Skemmst er frá því að segja að það er ekki hægt. Alltaf kemur fram skekkja, þegar tónbilin eru heiltöluhlutföll. Til dæmis ættu 12 fimmundir að ná yfir 7 áttundir, en þau gera það ekki ef bæði fimmundir og áttundir eru hreinar. Munurinn er hlutfallið $3^{12} : 2^{19}$, en frávík þess frá tölunni 1 er nefnt **komma Pýpagórasar**.

Sömuleiðis ættu að vera þrjár þríundir í einni áttund. Í náttúrlegum tónstiga eru þrjár þríundir $(5/4)^3 \approx 1,953$. Það er greinilega lægra en 2, sem er ein áttund. Í tónstiga Pýpagórasar mynda þrjár þríundir tónbilið $(81/64)^3 \approx 2,027$. Allir tónstigar með heiltöluhlutföll hafa slíka kommu, en komma Pýpagórasar er minnst.

Komma Pýpagórasar, $3^{12} : 2^{19}$, reiknuð í tugabrotum, er 1,0136.

Tónfræðingar og tónlistarmenn fyrri alda veltu því mjög fyrir sér hvaða meðalveg ætti að fara í þessum efnunum. Þannig urðu til fjölmargar mismunandi tegundir hljóðfærastillinga. Yfirleitt höfðu þær það að markmiði að halda nokkrum grunntónbilum - þríundum eða fimmundum - hreinum, en láta þá önnur tónbil mæta afgangi og taka á sig kvöð kommunnar. Þannig hljómuðu tóntegundirnar mishreint. Þeim var líkt við hinar ýmsu skapgerðir eða hugarástand. Hreinum tóntegundum var jafnað við tærleika og blíðu, en þeim ómstríðu við ofsa eða reiði. Tónskáldin náðu fram sterkum áhrifum með skyndilegum tóntegundaskiptum.

Undir lok 18. aldar fór svokölluð jafnbilastilling að ryðja sér til rúms. Þá er áttundinni skipt í 12 jöfn tónbil, sem samsvara hálfu tónbilunum. Ef skipta á hlutfallinu 2:1 í 12 bil þannig að hvert bil sé í sama hlutfalli og bilið á undan, þarf tónbilið n að vera þannig að $n^{12} = 2$ og þá er $n \approx 1,059$.

Hálfa bilið sem við reiknuðum fyrr í kaflanum var $256:243 \approx 1,053$, helmingur af heilu tónbili er $9:8 \approx 1,061$, og hálf tónbil í náttúrlegum tónstiga er $(4:3):(5:4) \approx 1,067$. Tónbilið n í jafnbilatónstiganum fer þannig meðalveg milli hálfu tónbilanna sem við höfum séð.

Fimmund nær yfir 7 hálfbil og $n^7 \approx 1,498$, eða mjög nærri 3:2. Þegar hljóðfæri eru stillt með slíkri jafnbilastillingu verður hvorki fimmund né ferund alveg hrein, en það munar mjög litlu og fæstir heyra nokkurn mun. Það er sérstök list að stilla saman hljóðfæri og í rauninni er þetta óleysanlega stríð milli heiltöluhlutfalla og jafnra bila þáttur í spennu sem skapast milli hljóðfæra í leik.

Upphafsmáður jafnbilatónstigans var Hollendingurinn Stevin, sá hinn sami og átti þátt í að hefja tugabrot til vegs og virðingar. Haft er eftir Stevin að jafnbilahlutföllin væru einu „sönnu“ hlutföllin, en heiltöluhlutföll eins og fimmundin 3:2 væru aðeins námundanir! Aðeins stærðfræðingur hefði getað látið sér slíkt um munn fara um aldamótin 1600 og helst einhver sem ekki þekkti til tónlistar. Hins vegar er þetta sjónarmið í fullu samræmi við kenningar í nútímatónlist, t.d. tónskáldsins Arnolds Schönbergs.

Það sem hér hefur komið fram, skýrir hvers vegna hlutföllin milli tónanna á píanóinu, sem reiknuð voru í upphafi, 1,260 og 1,498, eru ekki alveg hreinar þríundir og fimmundir heldur einmitt n^4 og n^7 .