

Nokkur tímamót í sögu íslenskrar stærðfræðimenntunar

Kristín Bjarnadóttir
Kennaraháskóla Íslands

Miklar breytingar urðu á kennslu í stærðfræði á Íslandi á áratugnum 1965–1975. Þær leiða hugann að því hvaða ástæður liggja að baki slíkum breytingum. M. Niss hefur skilgreint þrens konar grundvallarástæður stærðfræðimenntunar: Félagslegar og efnahagslegar, pólitískar og menningarlegar og þær sem miða að því að gera einstaklinginn að hæfari þegn í þjóðfélaginu. Þessi skilgreining er notuð sem viðmið þegar skoðaðar eru breytingar á stærðfræðimenntun sem urðu á ýmsum tímamótum í Íslandssögunni. Niðurstöðurnar eru þær að breytingar til framþróunar stærðfræðimenntunar geti orðið þegar saman fara væntingar yfirvalda um efnalegan ávinning af breytingunum og vonir frumkvöðla og fagfólks um dýpri skilning á stærðfræðinni og árangursríkara nám. Hlutur einstaklinga í að koma á breytingum skiptir verulegu máli.

Hagnýtt gildi: Greinin varpar ljósi á það hvernig einstaklingar, frumkvöðlar, geta skipt sköpum um framvindu mála í menntakerfinu. Stærðfræðimenntun hefur eflst þegar saman hafa farið hugsjónir menntamanna, stærðfræðinga og kennara um betri skilning á stærðfræði og árangursríkara nám en áður hefur náðst og væntingar ráðamanna um að efnalegur ávinningur sé í sjónmáli. Einnig má draga þann lærdóm af greininni að barátta milli talsmanna námsgreina um stöðu greinanna í menntakerfinu og mat á afstæðu mikilvægi þeirra, þar sem ýmsir hafa betur, hafi stöðugt átt sér stað og sé ævarandi. Þegar opinberar ákvarðanir eru teknar um vægi námsgreina í skólum er jafnframt verið að velja þau þjóðfélagslegu gildi sem móta raunverulega menntastefnu.

Á sjöunda áratug tuttugustu aldar urðu allmiklar breytingar á menntakerfi Íslendinga, ekki síst á menntun í stærðfræðilegum greinum. Þær ollu nokkru uppnámi. Hugleiðingar um atburði þess tíma vekja spurningar um ástæður þeirra og annarra breytinga sem hafa orðið á stærðfræðimenntun á ýmsum tímum. Hverjar eru ástæður þess að á sumum tímum var meira um að vera en á öðrum? Hvaða aðstæður leiða til þess að ný þörf skapast?

Ekki er gerlegt að skýra stöðu mála á sjöunda áratug tuttugustu aldar nema feta sig aftur eftir sögunni, að minnsta kosti til nítjándu aldar. Og hvers vegna var ástandið á Íslandi eins og það var á nítjándu öld? Freistandi er að rekja sig aftur til upphafs Íslandssögunnar

og skoða þá þræði stærðfræðimenntunar sem liggja fram til vorra daga.

Leitað verður svara við spurningunum með því að rannsaka nokkur tímamót þegar breyting varð á stærðfræðimenntun í landinu. Rannsóknin fer fram með aðferðum sagnfræðinnar, þ.e. með því að rannsaka heimildir, svo sem lög og reglugerðir, opinber skjöl, kennslubækur og önnur gögn, prentuð og handskrifuð, sem varða framvindu stærðfræðimenntunar á Íslandi.

Ekki þarf langa rannsókn til að átta sig á því að langtímum saman var lítið um að vera á sviði stærðfræði á Íslandi í samanburði við aðrar þjóðir, sé litið yfir ellefu alda sögu þjóðarinnar. Vafalaust hefur svo einnig verið í öðrum afskekktum byggðum Norðurlanda og

annarra nágrannalanda. Ísland var þó sjálfstætt samfélag með eigið tungumál sem vildi og varð að vera sjálfu sér nægt um fræðslu, bæði almenningsfræðslu og undirbúningsmenntun embættismanna. Íslendingar vildu jafnframt semja sig að síðum Evrópuþjóða og tileinka sér evrópska menningu. Hve mikla og hvernig stærðfræðimenntun töldu þeir sig þurfa til þess?

Ástæður stærðfræðimenntunar

Hvaða ástæður eru það sem hafa áhrif á menntun á sviði stærðfræði? Mogens Niss, prófessor við Hróarskelduháskóla, telur að þrjár meginástæður séu fyrir því að samfélag haldi úti menntun í stærðfræði, hvar sem er í heiminum á hvaða tíma sem er. Ástæðurnar séu að stærðfræðimenntun

- ✓ stuðli að tæknilegri, félagslegri og efnahagslegri þróun samfélagsins
- ✓ geri einstaklinginn hæfari en ella til að takast á við líf sitt, svo sem í námi, starfi og þátttöku í samfélaginu
- ✓ stuðli að pólitískri, hugmyndafræðilegri og menningarlegri þróun og viðhaldi samfélagsins (Niss, 1996: 13).

Vægi þessara ástæðna telur Niss að sé mismunandi á ólíkum tímabilum og í ólíkum þjóðfélögum en alltaf megi flokka ástæður undir einn eða fleiri þessara þátta svo og röksemdir fyrir breytingum. Ástæður þessar hafa einnig verið notaðar sem rök og réttlætning fyrir stöðu stærðfræðimenntunar á hverjum tíma. Hér á eftir verða raktar ástæður nokkurra tímamóta á sviði stærðfræðimenntunar á Íslandi ásamt röksemdum fyrir breytingum og þær bornar saman við staðhæfingu Niss.

Algorismus

Meðal hins mikla arfs Íslendinga í rituðu máli frá miðöldum leynist fróðleikur á sviði stærðfræði. Ritgerðin *Algorismus* er ein hin heillegasta og merkasta á því sviði (Kristín Bjarnadóttir, 2004a). *Algorismus* er nánast bein þýðing á skólaþjóði, *Carmen de Algorismo*,

latneskum hexameter eftir franska kanúkann Alexander de Villa Dei. Indó-arabísk talnaritun er kynnt í *Algorismus* ásamt aðferðum við sjö reikniadgerðir: samlagningu, frádrátt, tvöföldun, helmingun, margföldun, deilingu og rötardrátt, bæði ferningsrótur og teningsrótur. *Carmen de Algorismo* og *Algorismus* voru eins konar skólaútgáfur af riti Alkwarismis, *Kitab al-jam'val tafriq bi hisab al-Hind* (Bók um samlagningu og frádrátt með aðferð Indverjanna) sem barst til Evrópu og var þýdd á latínu á 12. öld (Allard, 1992). Textinn, sem er ítarlegur og réttur, greinir frá tilvikum eins og þeim þegar taka þarf til láns í frádrætti, geyma í samlagningu og draga ferningsrót. Margföldun margra stafa talna er nokkuð frábrugðin því sem nú tíðkast en er fullkomlega rétt lýst. Vitað er að ljóðið *Carmen de Algorismo* var ritað um 1202 (Lind, 1958: [1]), en elsta handritið sem til er af *Algorismus* er í *Hauksbók* og er talið ritað 1306–1308 (Stefán Karlsson, 1964: 119). Ritgerðin sjálf er eldri, ef til vill frá því um eða fyrir miðja þrettánda öld, og hugsanlegt er að hún hafi verið skrifuð í Viðey.

Hvers vegna voru Íslendingar að þýða þetta rit? Reikningslist var ein hinna sjö frjálsu lista, *septem artes liberales*, sem stundaðar voru í evrópskum dómkirkjuskólum. Hún tilheyrði fjórveginum svonefnda, *quadrivium*, þar sem voru tónlist, reikningslist, flatarmálsfræði og stjörnufræði. Aðrar þrjár námsgreinar töldust til þrívegarins, *trivium*, nefnilega mælskufræði, málfræði og rökfræði. Reikningslistin hafði hagnýtt gildi vegna þeirrar skyldu presta að fást við almanaksútreikninga. Lærðir menn, sem líklegastir voru til að geta skilið *Algorismus*, voru þó einnig læsir á latínu og áttu ef til vill auðveldara með að tileinka sér efni ritgerðarinnar í *Carmen* á latínu í bundnu máli.

Danski fræðimaðurinn Peder Nattegal, Petrus de Dacia (1897), ritaði skýringar á hliðstæðu riti, *Algorismus Vulgaris*, eftir Johannis de Sacrobosco, samtíðarmann Alexanders de Villa Deis, en Peder Nattegal ritaði á latínu. Íslendingar fylgdust þannig með evrópskum menningarstraumum og útfærðu

með sínum hætti. Líta má á þessa iðju, að aðlaga nýja menningarstrauma í Evrópu að íslensku máli, sem þátt í að þróa og auðga menningu vestnorræns samfélags. Vestnorræns í þessu tilviki, þar sem eitt handrita *Algorismus* er ritað á norski norrænu, sem var lítið eitt frábrugðin íslensku ritmáli um 1300.

Guðbrandur Þorláksson biskup

Guðbrandur Þorláksson Hólabiskup (1541/42–1627) var valdamesti maður sinnar tíðar á Íslandi. Hann sat í 56 ár á biskupsstóli og var umsvifamikill bókaútfefandi og baráttumaður fyrir hag kirkjunnar. Guðbrandur var fjölfróður og kunnur jafnt skil á fornri menningu sem nýjustu menntastraumum samtímans.

Á fimmtánda og sextánda öld voru Evrópubúar teknir að rannsaka aðra heimshluta. Siglingar og landmælingar voru því mikilvæg viðfangsefni fræðimanna. Landfræðileg breidd var ákveðin eftir hæð pólstjörunnar eða sólarhæð, en víða voru til töflur um sólarhæð á mismunandi tíma. Lengdarákvörðun var mun vandasamari. Nákvæmar mælingar þurfti til að átta sig á hnattstöðunni.

Daninn Tycho Brahe (1546–1601) stýrði bestu stjarnmælingastöð heimsins á eyjunni Hveðn á Eyraarsundi og mælingar hans tóku öllum fyrri mælingum fram (Katz, 1993: 372–373) þótt þær væru framkvæmdar áður en sjónaukinn kom til sögunnar. Oddur Einarsson, skólameistari Guðbrands á Hólum um hríð og síðar biskup, hafði verið aðstoðarmaður Brahes og Guðbrandur Þorláksson er talinn hafa átt sjálfur bréfaskipti við Brahe. Kunnátta Guðbrands í landmælingum var nægileg til að gera uppdrátt af Íslandi árið 1585 sem entist sem grunnur að Íslandskortum næstu hundrað árin. Þó átti Guðbrandur eftir að ákvarða nánar breiddargráðu Hóla. Nýrri mælingin, 65°44', mjög nærri hinni réttu, var birt í almanaki hans, *Calendarium*, árið 1597 (Einar H. Guðmundsson, 1996).

Kort Guðbrands biskups var brautryðjanda- verk og vísaði í sömu veru og verk þeirra sem fremstir voru í stærðfræðilegum greinum í heiminum. Kortið stuðlaði að öruggari

siglingum til Íslands en ella og þar með að tæknilegri og efnahagslegri þróun samfélagsins, en vitnar einnig um þá viðleitni Íslendinga að fylgjast með nýjungum evrópskrar menningar og telja sig til hennar.

Ný heimsmynd var í mótun á þessum tímamótum. Þar áttu hlut að máli fræðimennirnir Galíleó (1564–1642) og Kepler (1571–1630), sem hafði verið aðstoðarmaður Tycho Brahes og erft hið mikla safn Brahes af mælingum. Mælingarnar renndu stöðum undir hina nýju heimsmynd og áttu þátt í að staðfesta hana með stærðfræðilegum hætti. Íslendingar stóðu þannig nærri mestu vísindaafrekum heimsins um aldamótin 1600.

Brynjólfur Sveinsson biskup

Brynjólfur Sveinsson Skálholtsbiskup (1605–1675) er þekktur fyrir margt annað en að stuðla að stærðfræðimenntun. Hann taldi sig þó fyrst og fremst skólaman er hann valdist til biskups, enda hafði hann verið konrektor í latínuskóla í Hróarskeldu í sjö ár (Gunnar Harðarson, 1988: 91–92). Helsta framlag hans til stærðfræðimenntunar var að ráða eina sérmenntaða kennarann í stærðfræði og stjörnufræði sem vitað er til að hafi verið ráðinn að Skálholtsskóla, Gísli Einarsson (Einar H. Guðmundsson, 1998). Áður en Gísli kom út til Íslands hafði honum verið falið að reikna út almanak fyrir Danmörku, verk sem var aðeins falið færustu stærðfræðingum. Vitað er til að Gísli mældi stöðu halastjörnu allnákvæmlega eftir að hann kom til Íslands. Annars urðu örlög hans, eins og annarra lærðra manna, að sækjast eftir góðu brauði til að framfleyta sér og fjölskyldu sinni og var Gísli þá úr sögunni sem virkur stærðfræðingur. Nú var öld prentaðra almanaka runnin upp og þar með voru rök fyrir reikningskunnáttu presta að nokkru brostin.

Brynjólfur biskup var góður fulltrúi fornmenntastefnunnar. Hann safnaði fornum handritum sem tekin voru að týna tölunni á 17. öld. Hann hafði undir höndum tvö helstu handrit af *Algorismus*, GKS 1812 4to, sem hann sendi Friðriki III konungi að

gjöf 1656 (*Diplomatarium Islandicum* I, 1857–1876: 183–184), og *Hauksbók* (Jón Helgason, 1960: xxvii). Hann hefur vafalaust látið afrita þessi handrit og stuðlað þannig að varðveislu og viðhaldi menningararfsins á sviði stærðfræðimenntunar. Hagnýtt gildi *Algorismuss* var þá orðið lítið, enda prentaðar reikningsbækur komnar til sögunnar. Draumur Brynjólfs um að geta látið prenta hin fornu rit rættist ekki, en rúmri öld síðar var tólfstu aldar ritið *Rímbepla* um tímatal meðal hins fyrsta sem prentað var af fornum ritum (Einar H. Guðmundsson, 1995).

Kennslubækur í stærðfræði á 18. öld

Eftir tilkomu prentlistarinnar var tekið að prenta kennslubækur í stærðfræði sem og öðrum náms- og fræðigreinum. Vitað er að Skálholtsdómkirkja átti *Arithmetica Danica* eftir Jörgen From (Frommii, 1649), sem stundum er kennd við hann, *Frommii Arithmetica* (Hörður Ágústsson og Kristján Eldjárn, 1992: 347). Heimildir eru til um að Íslendingar hafi þýtt þá bók eða a.m.k. útdrátt úr henni (Skúli Magnússon, 1947). Til eru nokkur heilleg handrit frá öndverðri 18. öld, rituð samkvæmt hefð um reikningsbækur sem mörkuð er í riti Alkwarizmis og fylgt í *Algorismus*. Fyrsta prentaða reikningsbókin, *Lijted Agrip Vmm þær Fioorar Species I Reiknings Konstene*, var gefin út á Hólum (Hatton, 1746). Bókin er, eins og nafnið bendir til, stutt ágrip af reikniadgerðunum fjórum, alls 14 bls. Einnig er fjallað um breytingar milli helstu mælieininga og gjaldmiðla.

Á áttunda áratug aldarinnar voru gefnar út tvær yfirgripsmiklar kennslubækur í reikningi, auk kvers með töflum yfir helstu verð- og mælieiningar. Bækurnar tvær sem hér um ræðir eru *Greinilig vegleiðsla til talnalistarinnar* eftir Ólaf Olavius (1780), 374 bls. auk formála, og *Stutt undirvísun í reikningslistinni og algebra* eftir Ólaf Stefánsson (Stephensen) (1785), 248 bls. auk formála. Báðar þessar bækur voru yfirgripsmiklar kennslubækur

í reikniadgerðunum fjórum, breytingu verðeininga og hlutfallareikningi, auk þess sem bók Ólafs Stefánssonar, síðar stiftamtmanns, fjallaði um inngangsatriði algebru. Í bók Olaviusar er ítarlega fjallað um það sem hann nefnir talnabrögð, þ.e. margs konar leiðir sem geta auðveldað hugarreikning. Má sjá að um það efni hefur hann haft hliðsjón af þýskri bók, *Der demonstrativen Rechenkunst* eftir Christlieb von Clausberg, útg. í Leipzig 1732 og síðar endurútgefin 1748 og 1762 (Kristín Bjarnadóttir, 2007).

Báðar bækurnar eru greinilega viðleitni í þá veru að gera Íslendinga hæfari til að stunda viðskipti við erlenda kaupmenn og stuðla jafnframt að efnahagslegri þróun samfélagsins, en einnig voru bækurnar ætlaðar ungmennum sér í lagi. Bók Ólafs Stefánssonar, sem stundum var nefnd (*Stiftamtmanns*) *Ólafs Arithmetík*, var löggilt sem kennslubók við latínuskólana 1785, árið sem hún kom út (*Lovsamling for Island 1784–1791*, 1855: 244). Skólarnir voru þá í aumu ásigkomulagi eftir hörmungar Skaftárelda. Ekkert skólahald var í landinu veturinn 1784–1785 og Skálholtsskóli var fluttur að Hólavöllum í Reykjavík árið 1785. Menntun höfðu fyrirætlanir um stærðfræðimenntun en enginn var til að fylgja þeim eftir. Nemendur þurftu ekki að opna reikningsbók fremur en þeir sjálfir kærðu sig um (Árni Helgason, 1907–1915: 85–86). Óvíst er um áhrif þessara bóka en heimildir eru um tilvist þeirra á heimilum næstu áratugina (Sólrun B. Jensdóttir, 1969).

Björn Gunnlaugsson

Árið 1822 kvörtuðu tveir prófessorar við Kaupmannahafnarháskóla yfir því að íslenskir stúdentar uppfylltu ekki lágmarkskröfur um kunnáttu í stærðfræði sem settar höfðu verið árið 1818 (Þjóðskjalasafn, Skjalasafn kirkjustjórnarráðsins). Svo vel vildi til að það sama haust hafði stærðfræðingurinn Björn Gunnlaugsson (1788–1876) verið ráðinn að Bessastaðaskóla sem var þá eini lærði skólinn á Íslandi. Björn Gunnlaugsson hafði aldrei fengið aðgang að Bessastaðaskóla. Veturinn

1804–1805 var enginn skóli í landinu, næst kom umsókn hans of seint og síðar var hann orðinn of gamall. Nám Björns var því að miklu leyti sjálfsnám en hann brautskráðist með stúdentspróf hjá Geir Vídalín biskupi árið 1808. Geir biskup gaf honum hinn besta vitnisburð um kunnáttu í stærðfræði (P. + B., 1947). Björn sigldi til Kaupmannahafnar 1817 og nam stærðfræði. Einungis var unnt að brautskrást frá Hafnarháskóla með embættispróf í guðfræði eða lögum. Björn stefndi því ekki að brautskráningu heldur ritaði yfirvöldum bréf þar sem hann bauð fram krafta sína sem stærðfræðikennari við Bessastaðaskóla. Boð hans var þegið og hann hóf 40 ára starf við Lærða skólann haustið 1822, fyrst á Bessastöðum en síðan í Reykjavík. Í upphafi starfs síns sagði Björn:

Til þess að geta lifað, og lifað þægilegu lífi, verðum vér að nota þau gæði sem guð hefur oss í náttúrunni fyrirbúið, til að nota náttúrunnar gæði verðum vér að þekkja hennar gang ... til að rannsaka hann verðum vér að reikna hann út ... og höfum vér ekki allir tækifæri og tómsundur til þess, þá verðum vér að senda nokkra njósnarmenn út sem gjöri það fyrir oss. Sérhvör þjóð ætti því að hafa sína mathematicos til að senda þá út í náttúruna sem njósnarmenn á undan sér til að rannsaka hennar leyndardóma og sem vísi síðan þjóðinni á eftir hvört hún leita skuli til að finna þau gæði sem í henni eru fólgin (Úr ræðu Björns við skólasetningu 1822 eða 1823. Björn Gunnlaugsson, 1993: 54–66).

Björn ræddi ítarlega hvernig stærðfræðin kæmi að gagni í hernaði, landmælingum, iðnaði ýmiss konar, byggingu mannvirkja og sjónglerja sem og í stjörnufræði og arkitektúr. Björn taldi einnig til kosta stærðfræðinnar glæsileika hennar og hve skemmtileg hún væri þeim sem hana iðkuðu, „útrunduð með sniðugleik“, auk þess sem hún væri mannum „nytsöm til að æfa þenkingarkraft hans“ þar sem stærðfræðin væri hin besta æfing í „lógik“ eða rökfræði. Það sé vegna þess að hvergi sé „sannleikurinn í öðrum vísindum svo hægur rannsóknar og so greinilega aðskilinn frá ósannindunum sem í mathematík“. Birni var því hugleikið almennt

menntunar- og menningargildi stærðfræðinnar.

Lengst af skipuðust sex árgangar nemenda Lærða skólans á tímum Björns Gunnlaugssonar einungis í tvær eða þrjár bekkjardeildir, síðast fjórar. Tekið var við nýliðum inn í bekkina á hverju ári, jafnvel í efri bekk ef þeir voru langt komnir í latínu, þótt lítil væri kunnáttan í stærðfræði. Samt sem áður var árangur 19 íslenskra nemenda á fyrsta lærdómsprófi við Kaupmannahafnarháskóla á árabílinu 1847–1851 ekki síðri í stærðfræði en í latínu og sögu (*Skýrsla um hinn lærða skóla 1851–52*), greinum sem nemendur höfðu allajafna góðan undirbúning í úr heimaskóla.

Björn Gunnlaugsson studdist við danskar kennslubækur í kennslu sinni við Lærða skólann. Árið 1865, þremur árum eftir að hann hætti kennslu, gaf Hið íslenska bókmenntafélag út bók hans, *Tölvísi*. *Tölvísi* er ítarlegt rit um reikning og algebru, hið langítarlegasta sem þá og lengi síðar hafði verið gefið út á íslensku, en þó var aðeins helmingur ritsins prentaður, 400 blaðsíður. Bókin var aldrei notuð við kennslu og hún hefur líklega ekki haft mikil áhrif á framvindu stærðfræðimenntunar á Íslandi. Merkilegt er þó að taka eftir að Björn hefur þekkt *Algorismus* í *Hauksbók*. Snemma í bókinni skýrir Björn talnaritun þá sem almennt tíðkast. Hann segir tölustafina indverska og vísar í Hauk Erlendsson, höfund *Hauksbókar* (Björn Gunnlaugsson, 1865: 4). Ekki er vitað hvernig Björn hefur haft kynni af *Hauksbók*, sem kom fyrst út á prenti 1892–1896, en tilvísunin vitnar um hin langæju menningaráhrif þrettándu aldar ritgerðarinnar *Algorismus*.

Ástæður þess að Björn Gunnlaugsson var ráðinn að Bessastaðaskóla voru í upphafi hagnýtar, skólann skorti kennara til að búa nemendur sína undir kröfur Hafnarháskóla. Rök Björns fyrir iðkun stærðfræði vörðudu vissulega hagnýtingu hennar en einnig menningar- og menntagildi.

Reglugerð fyrir Lærða skólann 1877

Kennslu í stærðfræði hnignaði eftir daga Björns Gunnlaugssonar við Lærða skólann. Árið 1871 var lærðum skólum í Danmörku skipt í stærðfræði- og náttúrufræðideild og tungumála- og sögudeild. Reykjavíkurskóli var of fámennur til að skipta honum í tvær deildir og skólayfirvöld völdu tungumála- og sögudeild fyrir Reykjavíkurskóla. Í stað stærðfræði tvö síðustu árin var kennsla aukin í dönsku og trúfræðslu. Stærðfræði varð ekki prófgrein á stúdentsprófi fyrr en árið 1922 og stærðfræðikennsla í skólanum varð mun minni en áður. Um þessa ákvörðun sköpuðust miklar umræður og bréfaskriftir meðal yfirvalda, kennara og á Alþingi (Kristín Bjarnadóttir, 2004b). Skoðanaskiptin stóðu yfir um sex ára skeið. Sitt sýndist hverjum um gagnsemi stærðfræðinámsins. Rökin með ákvörðuninni voru m.a. þau að einungis einn nemandi á hverjum tíu árum sæktist eftir verkfræðinámi og hann yrði að útvega sér einkakennslu. Jón Þorkelsson, rektor Lærða skólans, sagði í bréfi árið 1882:

Þetta kvantum [stærðfræði máladeildar] er að minni ætlan þeim nægilegt, sem eigi ætla að ganga á polytechniska skólann í Kaupmannahöfn. Þeir Íslendingar, sem hingað til hafa á hann gengið, eru mjög fáir, og ef ályktað er af tölu þeirra, má gera ráð fyrir, að varla muni meira enn einn Íslendingr ganga á polytechniska skólann á hverjum tíu árum. Þeir hinir fáu, sem á hann gengi, yrði að útvega sér aukakennslu í stærðfræði. Ef sú stundatafla, sem nú gengr til kennslu í stærðfræði, yrði aukin um 6 stundir (frá 19 stundum til 25) þá hlýti það að mestu leyti að verða á kostnað málanna; enn eg fyrir mitt leyti legg mesta áherzlu á kennsluna í þeim; enn því færri stundir sem þeim eru ætlaðar, því ófullkomnari verðr kennslan í þeim. Eg get því eigi lagt til, að kennslan í stærðfræðinni verði aukin frá því sem nú er (Þjóðskjalasafn. Íslenska stjórnardeildin).

Finnur Jónsson, sem þá var stúdent við Hafnarháskóla, skrifaði þetta árið 1883:

Stærðfræði er kennd að eins í 4 neðri bekkjunum; þessi fræði hefir, svo langt sem jeg man, ekki átt neinum vinsældum að fagna hjá hávaðanum af piltum, og optlega hafa þeir spurt að, hvað það ætti að þýða að kenna svona mikið í stærðfræði, og eru slíkar spurningar vottur um sorglega kennslu og sorglegan misskilning. Ef kennarinn getur ekki einu sinni komið lærisveinum sínum í skilning um gildi þeirrar fræðigreinar er hann kennir, þá er eitthvað veilt við kennsluna alla í heild sinni, enda veit jeg og að það hefir verið; það sem vestu hefir gegnt, er skortur á skriflegum æfingum; ... alla dýpri eigna skilning hefir vantað, öll verkleg notkun hefir verið lokuð úti, og þess vegna hafa menn verið að spyrja um, hvers vegna allt þetta skuli lært; það er eðlileg afleiðing fáfræðinnar (Finnur Jónsson, 1883: 115).

Skilyrði fyrir stærðfræðimenntun við Lærða skólann virðast hafa verið léleg á níunda áratug nítjándu aldar. Yfirvöld lands og skóla sáu ekki þau not sem hafa mætti af stærðfræðinámi og kennslan, sem til boða stóð, var ekki til þess fallin að sýna fram á nytsemi hennar, hvorki til hagnýtingar né menningarauka. Framundan voru þó mestu framfaratímar í sögu þjóðarinnar, en kunnátta til stærri verka, svo sem til brúarsmíði og hafnargerðar, var engin, enda hafði enginn Íslendingur lokið námi í verkfræði.

Stærðfræðideild 1919 og dr. Ólafur Daniélfsson

Á næstu árum og áratugum jókst eftirspurn eftir íslenskum verkfræðingum. Menn höfðu áttað sig á að það var ódýrara að stuðla að menntun íslenskra verkfræðinga en að ráða erlenda. Þeir staðfestust á Íslandi og sættu sig við lægri laun en erlendir menn (Sveinn Þórðarson, 2002).

Í uppkasti Guðmundar Finnbogasonar að reglugerð 1904 fyrir Hinn almenna menntaskóla í Reykjavík í stað Lærða skólans var gert ráð fyrir tveimur deildum, stærðfræðideild og máladeild. Kennarar stríkuðu það út í breytingartillögum sínum (Þjóðskjalasafn, Skjalasafn stiftsyfirvalda).

Umræður hófust um tengsl tæknilegra framfara og stærðfræðipækkingar. Ágúst H. Bjarnason sagði í blaði sínu *Iðunni* 1919:

Við eigum fyrir höndum að erja stórt og örðugt land og gera okkur það undirgefið. Við eigum eftir að beisla fossa okkar til þess að leiða ljós og yl yfir landið, til þess að vinna áburð úr loftinu og knýja allar vélar okkar. Hér þarf sérfræðing á hverju strái; en enginn kann neitt í þeim efnum, sem okkur vanhagar mest um ... Og þó fyllumst við belgingi og yrkjum kvæði á kvæði ofan um eigin yfirburði og ágæti ... (Ágúst H. Bjarnason, 1919: 80).

Stærðfræðin kennir manni að hugsa skarpt og ákveðið án nokkurra vafninga ... (83).

Þar kom að stærðfræðideild var stofnuð við Menntaskólann í Reykjavík. Mestu munaði um rök menntamannanna Ágúst H. Bjarnasonar og þeirra féлага Þorkels Þorkelssonar, síðar veðurstofustjóra, og stærðfræðingsins dr. Ólafs Daníelssonar. Ólafur hafði flutt heim með magisterspróf í stærðfræði árið 1904, en ekki fengið kennslu við Menntaskólann. Hann ritaði kennslubók í reikningi árið 1906, *Reikningsbók*, sem átti eftir að hafa mikil áhrif, kenndi við Kennaraskólann frá stofnun hans árið 1908 og varði doktorsritgerð við Hafnarháskóla árið 1909 (Guðmundur Arnlaugsson og Sigurður Helgason, 1996). Þeir Ólafur og Þorkell beittu sér fyrir aukinni stærðfræðikennslu, annaðhvort í sérstökum skóla eða með stofnun stærðfræðideildar, og þeim varð að ósk sinni árið 1919. Rök yfirvalda voru enn sem fyrr af hagnýtum toga, að sjá landinu fyrir fleiri verkfræðingum, en dr. Ólafur hafði aðra sýn á stærðfræði. Hann segir í formála bókar sinnar *Um flatarmyndir* (1920):

Jeg þykist hafa orðið þess var, að ýmsum mentamönnum dylst gersamlega tilgangur stærðfræðinámsins í skólunum, halda, að takmark rúmfræðikenslunnar sje eitthvað í áttina til þess að kenna mönnum að mæla kálgarða eða túnskíka. En þá væri illa varið löngum tíma og miklu erfiði, og held jeg fyrir mitt leyti, að betra væri þá að fá búfræðing til þess að mæla blettinn, en sleppa stærðfræðináminu í skólunum og losa þannig marga upprennandi mentamenn við mikið andstreymi.

... Nei, tilgangurinn ... er sá, að venja nemandann á þá nákvæmni í hugsun sinni og hugkvæmni um leið, sem engin önnur kenslugrein æfir hann í að sama skapi (3–4).

Dr. Ólafur Daníelsson var mikilvirkur kennslubókahöfundur og mjög áhrifamikill sem kennari við Menntaskólann um 22 ára skeið þar til er hann lét af störfum árið 1941. Hann hafði einnig áhrif á kennslubækur í reikningi fyrir barnaskólana. Elías Bjarnason var nemandi Ólafs í Kennaraskólanum. Elías gaf út kennslubækur í reikningi árin 1927–1929. Hann segir í formála að hann hafi reynt að komast hjá tilfinnanlegu ósamræmi við reikningsbók Ólafs Daníelssonar, sem mest muni notuð þegar barnaskólanámi er lokið (Elías Bjarnason, 1927: 2–3). Ennfremur þakkar hann Ólafi Daníelssyni ýmsar góðar ábendingar sem hafi orðið bókinni til bóta. Bækur Elíasar virðast því hafa verið Ólafs Daníelssyni að skapi. Þær voru valdar til ókeypis dreifingar eftir að Ríkisútgáfa námsbóka var stofnuð árið 1937.

Landsprófi miðskóla var komið á með fræðslulögum 1946. Þá voru bækur Ólafs Daníelssonar, *Reikningsbók* og *Kennslubók í algebru*, tilteknaðar sem námsefni til prófsins. Var svo fram til þess að landsprófið var afnumið árið 1976, en kostur var þó orðinn á að velja á milli bóka Ólafs og annarra höfunda. Bækur Elíasar Bjarnasonar í barnaskólum og bækur Ólafs Daníelssonar til landsprófs voru grunnnáms efni á Íslandi í um hálfu öld.

Breytingar eftir 1960

Verkefni í reikningsbókum Ólafs Daníelssonar og Elíasar Bjarnasonar færðust æ fjær þeim veruleika, sem nemendur ólust upp við, þegar tímar liðu fram. Þau lýstu horfnum þjóðfélagsháttum, fólki sem ferðast á bátum og hestum og verslar með hey og kvikfé, og vinnukonum sem þiggja laun sín í kjólum og skóm. Landsprófið staðnaði einnig. Það var í fyrstu mikil réttarbot fyrir ungmenni dreifbýlisins að því leyti að það tryggði þeim greiðari aðgang að langskólanámi en áður, en prófið var síðar álitnið þröskuldur í vegi ungs

fólks í þjóðfélagi sem hafði vaxandi þörf fyrir fjölbreytta menntun.

Þegar komið var fram um 1960 varð stöðnun í stærðfræðimenntun æ ljósari:

- ✓ Hún virtist stuðla að því að viðhalda og þróa menningu og hugmyndafræði samfélags sem var horfið
- ✓ og búa einstaklinginn undir að takast á við líf í annars konar samfélagi en beið hans.
- ✓ Menn vissu ekki hvernig stærðfræðimenntun gæti stuðlað að tæknilegri og efnahagslegri þróun samfélagsins.

Menntamálaráðuneytið var lítil skrifstofa í Stjórnarráðinu og vanmegnug. Niðurstöður alþjóðauppeldismálaþinga, sem haldin voru í Genf árin 1950 og 1956, voru kynntar í tímariti barnakennara, *Menntamálum* 1961, ekki af hálfu Menntamálaráðuneytisins heldur gerði það almennur kennari á Vesturlandi, Gestur O. Gestsson. Þar segir:

... reikningsnám er réttur og hagur sérhvers manns, án tillits til kyns hans eða kynstofns, stéttar, stöðu eða starfs. ... Reikningur, með þeim hugsanamáta sem hann skapar, ætti að vera mikill þáttur í uppeldi hvers manns jafnt þótt störf hans verði hvorki á sviði tækni né vísinda. ... Nauðsynlegt er a) Að varðveita áhugann á reikningnum og hagnýtingu hans. b) Að taka fullt tillit til eigin hugsanamáta hvers nemanda ... (Gestur O. Gestsson, 1961: 120–122).

Ný viðhorf til stærðfræðimenntunar voru að skjóta rótum, að reikningsnám sé réttur hvers manns og taka skyldi tillit til hugsanamáta nemenda. Námskrá var gefin út árið 1960 en þótti heldur takmörkuð. Gestur gagnrýndi námskrána í sömu grein í *Menntamálum*. Hann hafði eftir þjóðkunnum manni að telja þyrfti ekki að læra mikinn reikning til að geta afgreitt í brauðbúð. Gestur sagði:

Stjórnendur fræðslumálanna ... skilji það ekki, að stúlka, sem afgreiðir í brauðbúð sé maður, að hún eigi rétt á að lifa eigin menningarlífi, taka þátt í þjóðmálum og vera, eða verða, góð móðir ... (1961: 125).

Gagnrýni á steinrunnin viðhorf voru þarna að koma fram frá grasrótinni. Reikningsnám væri mannréttindi sem stuðluðu að því að fólk gæti lifað eigin menningarlífi og tekið þátt í þjóðmálum. Hér má greina annað atriðið í upptalningu Niss á meginástæðum stærðfræðimenntunar, að gera einstaklinginn hæfari til þátttöku í samfélaginu. Gestur kynnti líka fyrir kennurum reikningsaðferðir úr ritgerðinni *Algorismus*, leiðarminni um forna þekkingu (Gestur O. Gestsson, 1962).

Umræðan á uppeldismálaþingunum var bergmál af hræringum sem voru að búa um sig erlendis. Eftir seinni heimstyrjöld fór fram endurskoðun á námsefni í stærðfræði, bæði í Bandaríkjunum og Evrópu. OECC, síðar OECD, Efnahags- og framfarastofnun Evrópu, setti fram kenningar um að menntun, sér í lagi í stærðfræði og raungreinum, stuðlaði að efnahagslegum og félagslegum framförum. Samtökin fólu sérfræðingum að endurskoða kennslu þessara greina og gengust fyrir fundi stærðfræðinga, stærðfræðikennara og sérfræðinga í stærðfræðimenntun í Royaumeont, Frakklandi, í nóvember 1959 (OECC, 1961). Ætlunin var að auka veg hagnýtrrar stærðfræði, en á fundinum vógu þyngra rök þeirra sem mæltu með rökfræði, mengjafræði og algebru sem umgjörð að skólastærðfræði, allt niður í barnaskóla. Svonefnd „nýstærðfræði“ tók að breiðast út um heiminn.

Íslendingar áttu ekki fulltrúa í Royaumeont, en hugmyndir um nýstærðfræðina bárust stærðfræðikennurum á Íslandi frá dönskum kollegum. Stærðfræðingarnir Guðmundur Arnlaugsson og Björn Bjarnason, kennarar við Menntaskólann í Reykjavík og verkfræðideild Háskóla Íslands, höfðu báðir dvalið í Danmörku á tímum seinni heimstyrjaldarinnar. Þeir þekktu Svend Bundgaard, prófessor í stærðfræði við Árósháskóla, en hann var helsti forvígismaður um innleiðingu nýstærðfræðinnar í Danmörku.

Þeir Guðmundur og Björn hófu breytingarnar á því að taka bandaríska kennslubók, *Principles of Mathematics* eftir Allendoerfer og Oakley (1963), til kennslu við Menntaskólann í

Reykjavík árið 1964 en danskar kennslubækur höfðu verið notaðar þar allar götur frá tímum Björns Gunnlaugssonar. Guðmundur var síðan ráðinn námstjóri í stærðfræði við barna- og gagnfræðastigið í hálfu starfi. Hann vísaði Fræðsluskrifstofu Reykjavíkur á kennslubækur Agnete Bundgaard til nota á barnastiginu (Kristinn Gíslason, 1978) líklega samkvæmt ábendingu Svend Bundgaards, bróður Agnete. Jafnframt ritaði Guðmundur sjálfur kennslubók handa efri bekkjum gagnfræðastigsins, landsprófs- og gagnfræðadeildum. Bókina nefndi hann *Tölur og mengi* (1966). Kennsla í nýju stærðfræðinni skv. bókum Bundgaards og Guðmundar Arnlaugssonar hófst samtímis í barna- og gagnfræðadeildum árið 1966.

Snemma sama ár, 1966, hafði Sveinbjörn Björnsson tekið saman skýrslu þar sem borin var saman kennsla í stærðfræði og raungreinum á Íslandi og á Norðurlöndum. Niðurstöður voru þær að Íslendingar stæðu Norðurlöndunum hvergi á sporði í tédum námsgreinum og úrbóta væri þörf. Að beiðni ráðherra menntamála, dr. Gylfa Þ. Gíslasonar, sem var einnig ráðherra málefna OEEC/OECD, gerði Sveinbjörn ítarlega verk- og kostnaðaráætlun um endurnýjun námsefnis í edlisfræði. Dr. Gylfi setti á laggirnar skólarannsóknir árið 1966. Þær urðu síðan að Skólarannsóknadeild ráðuneytisins sem tók allt menntakerfið til endurskoðunar. Fyrstu verkefni voru endurskoðun á edlisfræðikennslu að tillögu nefndar Sveinbjörns og endurskoðun á stærðfræðikennslu sem þegar var hafin að frumkvæði Fræðsluskrifstofu Reykjavíkur.

Rök Guðmundar fyrir breytingum á náms-efni koma fram í formála að kennslubók hans, *Tölum og mengjum*:

Áhersla á leikni og vélrænum vinnubrögðum hefur þokað fyrir kröfum um aukinn skilning. Þessi þróun hefur ýtt nokkrum grundvallarhugtökum úr rökfræði, mengjafræði og algebru niður á barnaskólastig. Reynolds víðs vegar að bendir til þess, að börn – og það jafnvel á unga aldri – eigi tiltölulega auðvelt með að tileinka sér þessi hugtök, sem áður voru eigi kynnt fyrir en á háskólastigi, og hafi gaman af þeim. Enn fremur virðast þau

stuðla að auknum skýrleik og nákvæmni í hugsun og reikningi (Guðmundur Arnlaugsson, 1966: 4).

Nýstærðfræðin olli miklu umróti. Skólar og kennarar voru lítt búnir undir að takast á við námsefnið og fyrir valinu hafði orðið óvenju fræðilegt og þurrt efni fyrir barnakennsluna, námsefni Agnete Bundgaard. Fljótlega var ákveðið að skapa frá grunni nýtt íslenskt námsefni fyrir barnaskóla en áður hafði engum verið treyst til þess. Eftir nýstærðfræðina losnaði óvænt um frumkvæði og sköpunarkraft kennara.

Áhugavert er að draga fram hverjar voru raunverulegar ástæður róttækra breytinga á stærðfræðikennslu á Íslandi á árabílinu 1964–1974. Ástæður kennaranna voru vonir um aukinn skilning á stærðfræðinni. Stöðnunin var auðsæ. Ástæður yfirvalda voru væntingar um efnahagslegan og félagslegan ávinning. Vonir beggja rættust aðeins að takmörkuðu leyti, en tilraunin varð til að hreyfa við hugmyndum fólks um stærðfræðinám og -kennslu og leysa frumkvæði kennara úr læðingi. Raunar var ekki aðeins hreyft við hugmyndum íslensks skólafólks um stærðfræði heldur hafði nýstærðfræði áhrif á stærðfræðikennara um heim allan og við hana má miða upphaf stærðfræðimenntunar sem rannsóknarefnis og fræðigreinar.

Lokaorð

Stiklað hefur verið á stóru um þróun stærðfræðimenntunar á Íslandi og staðnæmst við helstu tímamót. Að hverjum tímamótum er aðdragandi sem ekki verður rakinn hér né heldur framvinda mála. Aðeins er fjallað um niðurstöður til að draga fram meginatriði. Þau eru tvenns konar en af sama toga. Annars vegar eru væntingar sem yfirvöld gera sér um árangur af stærðfræðimenntun. Hins vegar er um að ræða framtak einstaklinga sem vinna að breytingunum, frumkvöðla sem hafa eigin væntingar um árangur verka sinna.

✓ **Á þrettánda öld** þýddi óþekktur höfundur ritgerðina *Algorismus*.

Geta má sér til að sá eða þeir sem kostuðu og sáu um þýðinguna hafi haft hagkvæmnisjónarmið í huga, að auðvelda kirkjulega útreikninga, en hafi einnig verið að fylgja þeirri tísku sem efst var á baugi í Evrópu og laga að íslenskri menningu sem þá var að öðlast sín sérkenni. Ritgerðin átti eftir að verða lærdómsmönnum í reikningi leiðarminni um aldir.

- ✓ **Árið 1585** gerði **Guðbrandur Þorláksson**, valdamesti maður sinnar tíðar, kort af Íslandi sem byggt var á vísindalegri þekkingu hans en þjónaði hagnýtum markmiðum: Að stuðla að öruggum siglingum til landsins og þar með menningarlegum samskiptum við Evrópu.
- ✓ **Árið 1822** bauð **Björn Gunnlaugsson** sig fram og var ráðinn stærðfræðikennari að Bessastaðaskóla. Opinberar ástæður fyrir því að auka veg stærðfræði við skólann voru að tryggja stúdentum aðgang að Hafnarháskóla en rök Björns hnigu að hagnýtingu og menntunargildi stærðfræðinnar.
- ✓ **Árið 1877** var kunnáttu í stærðfræði ekki lengur krafist til aðgangs að Hafnarháskóla. Þá voru borin fram efnahagsleg rök, að of dýrt væri að skipta Lærða skólanum í stærðfræðideild og máladeild, til þess væri hann of fámennur, og yfirvöld völdu máladeildarleiðina. Enginn stærðfræðingur starfaði þá við skólann til að halda fram menntunarlegum eða hagnýtum sjónarmiðum um stærðfræðimenntun. Menntun í stærðfræði dróst saman og lá í láginni um fjögurra áratuga skeið.
- ✓ Stærðfræðideild við Menntaskólann í Reykjavík var stofnuð **árið 1919** fyrir hvatningu verkfræðinga og dr. **Ólafs Daníelssonar**. Opinberar ástæður voru að tryggja stúdentum undirbúning

undir verkfræðinám, þ.e. hagnýts eðlis. Rök dr. Ólafs voru á hinn bóginn aðallega menntunar- og menningarleg og sneru að einstaklingnum, að venja nemandann á nákvæmni í hugsun og hugkvæmni um leið.

- ✓ Um **miðjan sjöunda áratug 20. aldar**, þegar nýstærðfræðin var innleidd, voru opinber rök þau að menntunin leiddi til efnahagslegra og félagslegra framfara. Rök forvígismannanna, **Guðmundar Arnlaugssonar** og **Björns Bjarnasonar**, voru væntingar um að hin nýju hugtök myndu leiða til aukins skýrleika og skilnings á stærðfræðinni.

Sé litið yfir þessa samantekt má greina þær þrennar ástæður fyrir stærðfræðimenntun sem Niss taldi fram; þ.e. hinar menningarlegu, efnahagslegu og einstaklingsbundnu ástæður. Stærðfræðimenntun hefur eflst þegar saman hafa farið hugsjónir menntamanna, stærðfræðinga og kennara um betri skilning á stærðfræði og árangursríkara nám og vonir ráðamanna um að efnalegur ávinningur sé í sjónmáli, svo sem nákvæmt tímatal, greiðari siglingar með bættri kortagerð, aukin verkunnátta með bættem aðgangi að verkfræðinámi eða væntingar um efnahagslegar og félagslegar framfarir. Síst verður greind þriðja ástæða Niss, varðveisla stærðfræðinnar sjálfrar sem menningararfs heimsins. Ritgerðin *Algorismus* varð sá hluti þess arfs sem Íslendingar kynntust. Hinnar fornu bókar *Frumatriða* (Heath, 1956) eftir gríska stærðfræðinginn Evklíð (um 300 f.Kr.) er hins vegar sjaldan getið í fornum ritum. Hún hefur þó verið nefnd farsælasta kennslubók sögunnar og var lengi önnur á lista yfir mest seldu bækur heims, næst á eftir *Biblúnni* (Singh, 2006: 87). *Algorismus* varð Íslendingum líkt og staðgengill *Frumatriða* sem leiðarminni um stærðfræðiarfinn forna.

Sagan sýnir að einstaklingar, frumkvöðlar, geta skipt sköpum um framvindu mála. Einstaklingar hafa haft frumkvæði og mótað

framfaraskeið. Mönnum getur líka yfirsétt hinn efnalegi ávinningur eins og gerðist árið 1877 þegar stutt var í mesta framfaraskeið þjóðarinnar um aldamótin 1900 en enginn var til að tala máli stærðfræðinnar. Frumkvöðlar spretta heldur ekki fram fullskapaðir. Milli höfuðfrumkvöðla í íslenskri stærðfræðimenntun er þráður. Ólafur Daníelsson var nemandi Björns Jenssonar sem var dóttursonur Björns Gunnlaugssonar. Ólafur varð síðar kennari Guðmundar Arnlaugssonar. Guðmundur kenndi Birni Bjarnasyni, en þeir Björn og Guðmundur urðu samverkamenn um langa hríð.

Sagan sýnir ennfremur að stærðfræðimenntunin hefur ekki alltaf staðið undir væntingum. Enn spyrja nemendur til hvers stærðfræði sé kennd og svör virðast oft hvorki nægja til að sannfæra nemendur, skólustjórnendur né önnur skólayfirvöld. Enn í dag togast á sjónarmið um hvort kenna skuli stærðfræði á hinum ýmsu stigum íslensks skólakerfis og þá hvað skuli kenna. Það er ekki einsdæmi í heiminum.

Haldgóð stærðfræðimenntun er þó menningaraukandi í víðasta skilningi eins og hvaða list- eða fræðigrein sem er og lögd er stund á af heilum huga. Á ögurstundum hafa stærðfræðingar fært rök fyrir því að engin kennslugrein sé betur til þess fallin en stærðfræðin að æfa nemendur í nákvæmni og rökfestu. Hinir best menntuðu stærðfræðikennarar eru trúir þeim aga sem þeir hafa lotið til að ná árangri í námi sínu, á svipaðan hátt og listamenn sem langt hafa náð. Vandí þeirra er að finna vinnulag sem nær til ungra nemenda svo að þeir kynnist „stærðfræðinnar útgrundaða sniðugleik“ eins og Björn Gunnlaugsson komst að orði, en laðar nemendur jafnframt til að takast þær skuldbindingar á herðar sem agað nám krefst. Rannsóknir í stærðfræðimenntun eru nú í miklum vexti og framþróun um víða veröld (Niss, 2007). Vonandi verða þær til þess að auka og bæta nám og kennslu í stærðfræði til farsældar fyrir fólk og samfélag.

Abstract - Summary

Fundamental Reasons for Crucial Transformation of Mathematics Education in Iceland.

The paper discusses arguments and reasons for the presence or absence of mathematics education in Iceland through the centuries. M. Niss (1996) has defined three fundamental reasons for mathematics education: to contribute to the technological and socio-economic development of society at large, to contribute to society's ideological and political maintenance and development, and to provide individuals with prerequisites to help them to cope with life in various spheres in which they live – education or occupation; private life; social life; life as a citizen. These reasons have also been used as justification and arguments for mathematics education. In this paper, Niss's definition is used as a measure of changes in mathematics education when at a crossroads in the history of education in Iceland.

The impetus for the research covered in the paper were events in the 1960s when the OECD helped promulgate radical ideas about the content and purpose of mathematics education. The state of mathematics education in the country at that time awoke questions about the reasons for that state and its historical background. The answers were sought by using the historical method: by examining scholars' published works, legislation, regulations, reports and documents preserved in official archives, contemporary articles in newspapers and journals, interviews with persons involved and knowledgeable observers, published memoirs and biographies, textbooks from different times and the researcher's personal experiences.

The content of mathematics teaching and learning in Iceland traditionally concerned trade and prerequisites for university entrance until the 1960s. Even the most common need of the general public for mathematics, trade, was minimal for many centuries. However, there were several important moments when

decisions were taken to provide mathematics education for the benefit of society, supported by influential individuals who knew the capacity of mathematics education and had a vision of its cultural and educational value. Their arguments about fundamental reasons for mathematics education were of great importance. There were also moments when no such individuals were present to promote the teaching of mathematics and the subject was reduced in school curricula.

Iceland was under Danish rule from the late 14th century until the 20th. The country was gradually freeing itself from Danish subjugation, starting in 1874 when the Icelandic Althing (Parliament) was granted legislative power, subject to the King's consent. The country acquired Home Rule in 1904, sovereignty in 1918 and the republic was established in 1944. Cultural relationships with Denmark have lasted still longer, appearing, for example, in the common use of Danish textbooks in higher education up to the 1970s.

The population of Iceland is small, and so was its intellectual community for most of Iceland's 1100 years, up to the mid-1970s. From the 1550s until 1783 there were two cathedral schools in the country. From that time on until 1930 there was only one upper secondary school, a Latin School in Reykjavík or its vicinity until 1904, and from then on as the Reykjavík High School. University education in mathematics had to be sought abroad, mainly in Copenhagen, until a department of engineering was established at the University of Iceland in the 1940s, when World War II forced all connection to Denmark to be broken.

The mathematical community was still smaller. In the whole of the 19th century there was only one Icelandic mathematician, Björn Gunnlaugsson, whose work as teacher and land surveyor was an admirable and unique achievement. Dr. Ólafur Daníelsson was Björn Gunnlaugsson's successor in the 20th century, being a pupil of his grandson. Dr Ólafur Daníelsson's influence on Icelandic

mathematics education through his textbooks persisted for more than six decades. After his time, his pupil, Guðmundur Arnlaugsson, became the most influential person in mathematics education in the second half of the 20th century, and together with a colleague, he took the lead in school mathematics reform activities in the late 1960s. Thus there was a long-standing tradition of individual authority in the field of mathematics education.

The impact of the presence or absence of influential individuals versus official reasons for crucial transformation of mathematics education in Iceland may be summarized as follows:

- ✓ An unknown 13th century author translated the treatise *Algorismus* from the Latin hexameter *Carmen de Algorismo* by Alexander de Villa Dei, into the Norse language, spoken in Iceland. One could suggest that those who financed and worked out the translation had utilitarian aspects in mind, to facilitate ecclesiastical calculations, but were also following cultural trends in Europe and adjusting them to Icelandic culture which was developing its characteristics. This treatise proved to be a *leitmotiv* for scholars through the centuries. It was the part of the world mathematical heritage that was known and pursued in Iceland, much more so than Euclid's *Elements*, which are only sporadically mentioned in historical documents.
- ✓ In 1585, Bishop Guðbrandur Þorláksson, being the most powerful person in the country, made a map of Iceland based on his scientific knowledge, but also for utilitarian aspects, that a correct map would provide Icelanders with safer trade and sailing on which contact with European culture depended. In his work, the bishop kept up with the most recent scientific achievements of his time in the world, a new model of the

Earth, created by Galileo and Kepler.

- ✓ In 1822, when mathematician Björn Gunnlaugsson offered to become mathematics teacher at the country's only Latin School at Bessastaðir near Reykjavík, the official reason for his appointment and for enhancing mathematics was to provide the pupils with the necessary prerequisites for admission to the University of Copenhagen, though Gunnlaugsson also used utilitarian arguments about harnessing nature and promoted the cultural aspects of mathematics education.
- ✓ In 1877, mathematics was no longer required for admission to the University of Copenhagen. No mathematician existed at the Learned School to present cultural or utilitarian arguments for the subject, and the mathematics syllabus was reduced. There were too few pupils to offer a choice of a mathematics-science stream vs. a language-history stream at the school. During a period of the greatest material progress in Icelandic history in 1890–1919 there was no higher mathematics education within the country, for example to prepare for engineering studies. Such education had to be sought abroad, usually in Copenhagen.
- ✓ When a mathematics stream was established at the Reykjavík High School in 1919 on the urging of the newly established Association of Chartered Engineers in Iceland and mathematician Dr. Ólafur Daníelsson, the official reasons were to ensure prerequisites for engineering studies, i.e. utilitarian reasons for a rapidly industrializing society. Dr. Daníelsson's arguments for mathematics education were, however, mainly cultural, presenting mathematics as the most perfect science existing, and concerned

individuals' training in logic and exact thinking.

- ✓ In the mid-1960s 'modern' mathematics was implemented as part of a revision of the Icelandic school system, based on the influence of an international mathematics education reform wave, promoted by the OEEC, later the OECD. The official arguments were that education would contribute substantially to economic and social progress and the authorities supported the reform by funding on a previously unknown scale. The leader of the activities, Guðmundur Arnlaugsson, and his collaborator, Björn Bjarnason, had ideological arguments in mind, that the new concepts would be conducive to increased clarity and exactness of thinking.

A leadership of influential individuals was of crucial importance at points of transformation in Iceland. A redefinition of mathematics education could take place when both the official body that was to decide upon it and the persons that were to provide the pedagogical leadership had developed their own visions. Their approaches were not always identical but in all cases they may be classified among the fundamental reasons identified by M. Niss.

History also reveals that mathematics education has not always lived up to expectations. Pupils still ask why mathematics has to be taught and the answers often neither suffice to convince pupils, school leaders nor other school authorities. There are still tensions between views on whether mathematics is to be taught at the various stages of the school system and what should be taught. However, asking these questions is not unique to Iceland.

The professional leaders involved shared the conviction that proper mathematics education belongs to cultural values in the broadest sense, as does any other art or science that is truly pursued. Well educated mathematics teachers

submit to the discipline of their subject as artists striving for excellence. Their problem is to find ways of working that their pupils will take to in order to become acquainted with the benefits of mathematics, but will also lead them to accept the discipline of the subject. Research in mathematics education is now growing rapidly worldwide (Niss, 2007). Hopefully the results of the research will lead to ways to improve learning and teaching mathematics in the 21st century for the benefit of people and societies.

Heimildir

- Allard, A. (Ritstj.). (1992). *Muhammad Ibn Mūsā al-Kwārizmī. Le calcul Indien*. París: Societé des Études Classiques. Librairie scientifique et technique.
- Allendoerfer, C.B., og Oakley, C.O. (1963). *Principles of Mathematics*, önnur útg. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Ágúst H. Bjarnason. (1919). Æðri skólar. *Iðunn*, 5(1–2), 78–89.
- Árni Helgason. (1907–1915). Frásagnir um skólalíf á Íslandi um aldamót 18. og 19. aldar. 1. Skólahættir í Skálholti og í Reykjavíkurskóla hinum forna. Í *Safn til sögu Íslands og íslenkra bókmennta að fornu og nýju*, IV (bls. 74–98). Kaupmannahöfn og Reykjavík: Hið íslenska bókmenntafélag (HÍB).
- Björn Gunnlaugsson. (1865). *Tölvísi*. Reykjavík: HÍB.
- Björn Gunnlaugsson. (1993). Um nytsemi mælifræðinnar. *Fréttabréf íslenska stærðfræðafélagsins*, 5(1), 54–66.
- Clausberg, C. v. (1732, 1748, 1762). *Der Demonstrativen Rechenkunst*. Leipzig: Breitkopf.
- Diplomatarium Islandicum*, I. (1857–1876). Jón Sigurðsson (Ritstj.). Kaupmannahöfn: HÍB.
- Einar H. Guðmundsson. (1995). Stefán Björnsson reiknimeistari. *Fréttabréf Íslenska stærðfræðafélagsins*, 7(1), 8–27.
- Einar H. Guðmundsson. (1996). Tycho Brahe og Íslendingar. *Morgunblaðið, Menningarblað*, 14. desember.
- Einar H. Guðmundsson. (1998). Gísli Einarsson skólameistari og vísindaáhugi Íslendinga á 17. öld. *Saga* 36, 185–231.
- Elías Bjarnason. (1927–1929). *Reikningsbók I-II*. Reykjavík: Bókaverslun Guðm. Gamalíelssonar.
- Finnur Jónsson. (1883). Um hinn lærða skóla á Íslandi. *Andvari*, 9, 97–135.
- Finnur Jónsson (Ritstj.). (1892–1896). *Hauksbók. Udgiven efter de arnamagnæanske Håndskrifter no. 371, 544 og 675, 4° samt forskellige Papirhåndskrifter*. Kaupmannahöfn: Det Kongelige Nordiske Oldskrift-Selskab.
- Frommiius, G. (1649). *Arithmetica Danica Seu Brevis Ac Perspicua, Institutio Arithmeticae Vulgaris, Astronomicae, Geodætice, In Usu Gymnasiorum Et Scholarum Daniae Ac Norvegiae*, Fussy Regio Adornata À Georgio Frommio, In Academiâ Hafniensi Mathematicum, Professore Ordinario.
- Gestur O. Gestsson. (1961). Reikningur. *Menntamál*, 34(2), 113–125.
- Gestur O. Gestsson. (1962). Reikningskennsla. *Menntamál*, 35(2), 114–137.
- Guðmundur Arnlaugsson. (1966). *Tölur og mengi*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.
- Guðmundur Arnlaugsson og Sigurður Helgason. (1996). *Stærðfræðingurinn Ólafur Dan Daníelsson. Saga brautryðjanda*. Reykjavík: Háskólaútgáfan.

- Gunnar Harðarson. (1988). Heimspeki og fornmenntir á Íslandi á 17. öld. Um fræðaiðkun Brynjólfs biskups Sveinssonar. *Hugur*, 1(1), 89–100.
- Hatton, E. (1746). *Lijted Agrip Vmm þær Fiorar Species I Reiknings Konstenne*. Hólum: Hólaprent.
- Heath, T. L. (Ritstj.). (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Þýdd eftir texta Heibergs. I–III. New York: Dover Publications.
- Hörður Ágústsson og Kristján Eldjárn. (1992). *Skálholt, skruði og áhöld*. Reykjavík: HÍB.
- Íslenska stjórnardeildin. S. VI, 5. *Isl. Journal* 15, no. 680. *Skólamál*.
- Jón Helgason (Ritstj.). (1960). *Hauksbók. Manuscripta Islandica, Vol. 5*. Copenhagen: Munksgaard.
- Katz, V. (1993). *A history of mathematics. An introduction*. New York: Harper Collins College Publishers.
- Kristinn Gíslason. (Nóvember 1978). *Nýja stærðfræðin*. Óprentuð skýrsla til fræðslustjórans í Reykjavík.
- Kristín Bjarnadóttir. (2004a). Algorismus. Forn stærðfræðirit í íslenskum handritum. *Netla, vef tímarit um uppeldi og menntun*. Sótt af <http://netla.khi.is/greinar/2004/001/index.htm>.
- Kristín Bjarnadóttir. (2004b). Þegar Lærði skólinn varð að máladeild. *Raust* 2(2), 17–24. Sótt af <http://www.raust.is/2004/2/03>.
- Kristín Bjarnadóttir. (2006). *Mathematical education in Iceland in historical context. Socio-economic demands and influences*. Reykjavík: Háskólaútgáfan.
- Kristín Bjarnadóttir. (2007). Greinileg vegleiðsla til talnalistarinnar. Kennslubók í reikningi frá 1780. *Vefnir*. Sótt af <http://vefnir.bok.hi.is/2007/kb.pdf>.
- Lind, L.R. (Ritstj.). (1958). *Ecclesiale* by Alexander of Villa Dei. Lawrence: University of Kansas Press.
- Lovsamling for Island 5. 1784–1791*. (1855). 244. Reskript til Stiftsbefalingsmand Levetzow og Biskopperne Hannes Finnsson og Arni Thorarensen, ang. Indførelse i Skolerne af Stephensens Lærebog i Regning. Christiansborg 10. Februar 1786. Kaupmannahöfn.
- Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. Í A. Bishop (Ritstj.), *International Handbook of Mathematics Education*. Part I (bls. 11–47). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Niss, M. (2007). Reflections on the state and trends in research of mathematics teaching and learning. From here to Utopia. Í F. K. Lester (Ritstj.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (bls. 1293–1312). NCTM. Charlotte NC: Information Age Publishing.
- OEEC. (1961). *New thinking in school mathematics*, 2 útg. París: OEEC.
- Ólafur Daníelsson. (1906). *Reikningsbók*. Reykjavík: Sigurður Kristjánsson.
- Ólafur Daníelsson. (1920). *Um flatarmyndir*. Reykjavík: Guðmundur Gamalíelsson.
- P. + B. (1947). Björn Gunnlaugsson. Í Þorkell Jóhannesson (Ritstj.), *Merkir Íslendingar I* (bls. 65–78). Endurprentað úr *Andvara, tímariti hins íslenska þjóðvinafélags*, níunda ár, 1883, 3–16. (P. er Páll Melsteð og B. er Björn Jónsson). Reykjavík: Bókfellsútgáfan.

- Petrus de Dacia. (1897). *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentaribus*. Maximilianus Curtze (Ritstj.). Kaupmannahöfn: Danske Sprog- og Litteraturselskab.
- Singh, S. (2006). *Síðasta setning Fermat*. Reykjavík: Hið íslenska bókmenntafélag.
- Skjalasafn kirkjustjórnarráðsins SK/4 (örk 23).
- Skjalasafn stiftsfirvalda. Dagbók I, no. 385. *Lærði skólinn*. Skúli Magnússon. (1947). Skúli Magnússon. Í Þorkell Jóhannesson (Ritstj.), *Merkir Íslendingar*, II (bls. 37–64). Reykjavík: Bókfellsútgáfan.
- Skýrsla um hinn lærða skóla í Reykjavík skólaárið 1851–52*. Reykjavík.
- Sólrún B. Jensdóttir. (1969). Bókkaeign Austur-Húnvetninga 1800–1830. *Landsbókasafn Íslands. Árbók*, 25, 142–166.
- Stefán Karlsson. (1964). Aldur Hauksbókar. *Fróðskaparrit*, 13, 114–121.
- Sveinbjörn Björnsson. (1966). Samanburður á námi í stærðfræði, eðlisfræði og efnafræði í dönskum, norskum og íslenskum unglinga- og gagnfræðaskólum. *Menntamál*, 39(2), 100–121.
- Sveinn Þórðarson. (2002). *Frumherjar í verkfræði á Íslandi*. Reykjavík: Verkfræðingafélag Íslands.