



Ritrýnd grein birt 31. desember 2012

Kristín Bjarnadóttir

Björn Gunnlaugsson og *Tölvísi* Stærðfræði og einlæg trú í menntun 19. aldar

Ferill nítjándualdarstærðfræðingsins Björns Gunnlaugssonar (1788–1876) er einstakur. Hann naut aldrei skólavistar á Íslandi en náði óvenjulegum tókum á stærðfræði, að mestu með sjálfsnámi, áður en hann settist í Kaupmannahafnarháskóla, 29 ára að aldri. Þar vann hann til tvennra gullverðlauna fyrir stærðfræðiprautir. Hann kenndi stærðfræði við Bessastaðaskóla og Lærða skólann í Reykjavík um fjörutíu ára skeið og landmælingar hans voru grunnur að Íslandskortum í hálfra öld. Bók hans um stærðfræði, *Tölvísi*, var gefin út er hann var orðinn 77 ára að aldri. *Tölvísi*, sem er meginviðfangsefni greinarinnar, bregður ljósi á hversu mikils Björn mat stærðfræðina og á heimspekilega og trúarlega afstöðu hans til stærðfræðilegra hugtaka og lögmála. Nokkur efni verða skoðuð í því skyni að öðlast innsýn í hugsun Björns: núllið og óendanleikinn, veldareglur og ímyndaðar tölur. Höfundur er dósent við kennaradeild á Menntavísindasviði Háskóla Íslands.

Björn Gunnlaugsson and *Tölvísi*: Enlightenment and Religion in 19th Century Mathematics Education

Björn Gunnlaugsson (1788–1876) was a unique person. He was never admitted to a school in Iceland. He learnt mathematics by self-study before entering, at the age of 29, the University of Copenhagen, where he twice won its gold-medal for solving mathematical problems. He taught mathematics for forty years and made valuable geodetic measurements as a basis of a map of Iceland. His book on mathematics, *Tölvísi*, was published when he was 77 years old. The book, which is the main subject of this article, reveals his devotion to mathematics, and his philosophical and religious attitude towards mathematical concepts, structure and laws. In order to clarify his way of thought, several topics will be explored: zero and infinity, exponential laws and imaginary numbers. The author is associate professor at the Department of Teacher Education, School of Education, University of Iceland.

Inngangur

Ferill nítjándualdarstærðfræðingsins Björns Gunnlaugssonar er einstakur, hvort sem talið er meðal Íslendinga eða á heimsvísu. Hann braust til mennta við Hafnarháskóla 1817 án þess að hafa nokkurn tíma áður gengið í skóla. Síðan kenndi hann stærðfræði og fleiri námsgreinar við Lærða skólann á Bessastöðum og í Reykjavík um fjörutíu ára skeið. Landmælingar hans urðu grunnur að Íslandskortum í hálfra öld. Að starfsævinni lokinni ritaði hann bók um hugðarefni sitt, stærðfræðina, og nefndi hana *Tölvísi*. Aðeins fyrri hluti bókarinnar var prentaður og sagt var að hún væri bókin sem allir hældu en enginn læsi (P[áll Melsteð] og Björn Jónsson, 1883). *Tölvísi* er höfuðefni þessarar greinar. Rannsóknaraðferðin er textagreining. Bókin verður greind með tilliti til inntaks og tengsla við

aðrar bækur, en einnig með tilliti til ævi höfundar: lífskjara, lífsviðhorfa og lífsstarfsins við kennslu, landmælingar og búskap. Ýmsir hafa ritað um ævi Björns, svo sem Ottó J. Björnsson (1990, 1997), Páll Melsteð og Björn Jónsson (1883, höfundar tilgreindir með upphafsstaf, P. + B.). Þá hefur Einar Guðmundsson ritað um skáldskap hans og heim-spekihugmyndir en lítt hefur verið ritað um efni *Tölvísi*. Verður leitast við að bæta úr því hér.

Bakgrunnur

Lærði skólinn og stærðfræðikennsla fyrir tíma Björns

Árið 1802 voru skólarnir við biskupsstólana að Skálholti og Hólum sameinaðir í einn lærðan skóla að Hólavelli í Reykjavík. Skálholtsskóli hafði raunar verið fluttur þangað er skólahúsið hrundi í jarðskjálftum 1784. Ólafur Stephensen (1731–1812), sem síðar varð stiftamtmaður, gaf út bók sem nefndist *Stutt undirvísun í reikningslistinni og algebra* (Ólafur Stefánsson, 1785) og var umsvifalaust löggilt sem kennslubók fyrir stólsskólana (*Lovsamling for Island 5*, 1855). Skólasveinn í Hólavallarskóla ritaði síðar: „... öllum sem komust í efra bekk var gefin stiptamtmanns Ólafs Arithmetík, en það var í sjálfra piltanna valdi, hvort þeir luku upp bókinni nokkurn tíma eða aldrei.“ (Árni Helgason, 1907–1915). Í skýrslum Bessastaðaskóla (Þ.Í., Bps. C. VII, 3a) má sjá að aðeins voru kenndar þar reikniaðgerðirnar fjórar í heilum tölum og brotnum eins og mælt hafði verið fyrir um með tilskipun, *Forordning om de latinske Skoler paa Island*, frá 3. maí 1743 (Janus Jónsson, 1893).

Tveir prófessorar við Hafnarháskóla rituðu bréf til Den Kongelige Direction af Universitetet og de lærde Skoler í Danmörku, dagsett 7. nóvember 1826, með kvörtun yfir að íslenskir stúdentar uppfylltu ekki kröfur samkvæmt reglugerð frá 10. ágúst 1818 um kunnáttu í stærðfræði. Þeir hefðu ennfremur lært minna í grísku og latínu en krafist væri. Jóni Jónsyni rektor Bessastaðaskóla var falið að svara bréfinu. Hann sagði að fyrir skólaárið 1822–1823 hefði íslenskum stúdentum verið veitt undanþága frá prófum í stærðfræði þar sem engin algebra og rúmfræði væri kennd við skólann. Nemendur sem voru brautskráðir eftir 1823 hefðu ekki gilda ástæðu fyrir undanþágu frá prófi (Þ.Í., Skólastjórnarráð SK/4, örk 23). Björn Gunnlaugsson var ráðinn kennari við Bessastaðaskóla árið 1822.

Æska Björns Gunnlaugssonar og nám

Björn Gunnlaugsson (1788–1876), bóndasonur frá Tannstöðum við Hrótafjörð, þótti miður fallinn til bændavinnu og var settur til bóknáms hjá prestum. Hann komst aldrei í Lærða skólann. Hólavallarskóla var lokað 1804 sökum slæms aðbúnaðar og veturinn 1804–1805 var enginn skóli á Íslandi. Björn var talinn hafa sótt of seint um skólavist árið 1805 og vera orðinn of gamall 1806 og 1807. Hann lauk stúdentsprófi hjá Geir biskupi Vídalín árið 1808 með úrvals vitnisburði fyrir að

... hann Tilsagnar laust ekki að eins lauslega yfirlát (ei einarsta hvöru tveggju Reiknings listina, heldur ogso lardar mælingu – *Geometriam* –, Þríhyrninga mælingu – *Trigonometriam* –, Innanrúms mælingu – *Stereometriam* –, Reikning þess endanlega og oendanlega – *calculus finitorum et infinitorum* –, lafnvigtar konstina – *Staticam* –, Hræringar konstina – *Mechanicam* –, og fleiri parta þeirrar náttúrlegru Mælifrædis) heldar lærði sovel ad hann med sinni grundudu þeckingu letti mikid undir Erfidi Födurs síns ... hann ... var yfirheirdur og feck í Mælifræðinni sovel þeirri skiliandi sem giörandi og *logica* — frábært Hróð.
(P[áll Melsteð] og B[jörn Jónsson], 1883, bls. 16)

Björn virðist hafa tileinkað sér þetta flókna námsefni af bókum. Næstu níu ár mun Björn hafa sótt um nokkur prestaköll en ekki fengið. Hins vegar er vitað

að hann náði viðkynningu þeirra Scheels og Frisachs, lautinanta, er þá voru hjer að strandmælingum. Varð Birni það til góðs, því að bæði veittu þeir honum leiðbeiningu í þeirri mennt, er allur hans hugur hneigðist að, og gáfu honum bækur þar að lútandi. (P[áll Melsteð] og Björn Jónsson], 1883, bls. 4)

Björn fór með vitnisburðinn góða til Kaupmannahafnar haustið 1817 til að hefja nám í stærðfræði við Hafnarháskóla, þá orðinn 29 ára gamall. Hann kom of seint til að setjast í skólann eins og oft henti Íslendinga þar sem byr réð för. Haustið notaði Björn til að glíma við verðlaunapraut skólans og hlaut fyrir það fyrstu verðlaun, gullpening. Hann hlaut annan gullpening í verðlaun árið 1820.

Björn nam stærðfræði hjá prófessor Carl Ferdinand Degen (1766–1825) sem var vel að sér í verkum eftir Leonhard Euler (1752–1833), Adrien Marie Legendre (1752–1833), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) og Carl Friedrich Gauss (1777–1855) sem voru allir meðal áhrifamestu stærðfræðinga síns tíma. Vitað er að Björn las verk Eulers, Lagranges og Kästners (1719–1800), prófessors í Göttingen, á námsárum sínum. Ennfremur nam Björn landmælingar hjá prófessor H. C. Schumacher (1780–1850), samstarfsmanni Gauss, og aðstoðaði hann við að mæla upp Holtsetaland 1820 og 1821. Þurft hefði að brautskrá Björn í óskyldri grein, guðfræði eða lögfærði, að loknu námi þar sem ekki var unnt að brautskrá nemendur í stærðfræði frá Hafnarháskóla. Hann kaus því að rita bréf til skólayfirvalda í Danmörku en Bessastaðaskóli heyrði undir þau. Hann útskýrði skortinn á stærðfræðimenntun á Íslandi, gerði tillögu um að stofna kennarastöðu þar á því sviði og bauðst til að taka starfið að sér (Ottó J. Björnsson, 1997). Björn var ráðinn með bréfi dagsettu 14. maí 1822 (Lbs. 609, fol).

Stærðfræðikennsla Björns

Björn hóf störf við Bessastaðaskóla haustið 1822. Innsetningarræða hans, líklega frá árinu 1822, hefur varðveist. Hún lýsir trú hans á þátt menntunar í framför í átt að betra og þægilegra lífi:

Til þess að geta lifað, og lifað þægilegu lífi, verðum vér að nota þau gæði sem guð hefur oss í náttúrunni fyrirbúið, til að nota náttúrunnar gæði verðum vér að þekkja hennar gang; til að geta þekkt hennar gang verðum vér eða að minnsta kosti nokkrir af oss að rannsaka hann; til að rannsaka hann verðum vér að reikna hann út oft og tíðum með mathesi applicata; til að reikna með mathesi applicata verðum vér að þekkja mathesin puram og það til hlítar; og til þess að þekkja hana að gagni verðum vér að kynna oss öll veltingabrögð hennar að so miklu leyti sem oss er mögulegt; og höfum vér ekki allir tækifæri og tómsundur til þess, þá verðum vér að senda nokkra njósnarmenn út sem gjöri það fyrir oss. Sérhvör þjóð ætti því að hafa sína mathematicos til að senda þá út í náttúruna sem njósnarmenn á undan sér til að rannsaka hennar leyndardóma og sem vísi síðan þjóðinni á eftir hvört hún leita skuli til að finna þau gæði sem í henni eru fólgin. (Reynir Axelsson, 1993)

Bekkir Bessastaðaskóla voru aðeins tveir og nemendur sátu um það bil þrjú ár í hvorum bekk. Það fór þó eftir því hve vel undirbúnir þeir komu í skóla. Björn kenndi almenn brot og tugabrot, algebru og rötardrátt í neðra bekk sem svo var nefndur. Hann neyddist einnig til að kenna sama efni í efra bekk þar sem nemendur komu vel að sér í tungumálunum úr heimaskóla og voru því settir í efra bekk þó að þeir hefðu enga stærðfræði lært. Hann segir í skólaskýrslu um árið 1824–1825:

Dette var jeg nødsaget til at læse, uagted det også læses i nederste Classe, da nogle nykomne Discipler ikke have hørt dette, fordi Mathematik ikke er endnu blevet almindelig i Privatskoler, men disse Discipler havde lært saa megen

Latin, Græsk og Dansk at de maatte sættes enddog øverst i den øverste
Classe. (Þ.Í., Bps. C. VII, 3a)

Þetta breyttist smám saman og Björn gat skapað eðlilega stígandi í kennslunni. Skóla-
skýrslan 1840–1841 var rituð á íslensku. Rektor ritaði:

Undirkennari (Adjunctus) B. Gunnlaugsson hefir ... kénnt efribekkingum alla
jarðmælingarfræðina (Geometri) eptir Ursin. Þar les hann yfir hverja setningu
og útfærir sannanirnar á tölblunni, bætir og stundum við nýum sönnunum, svo
lærisveinarnir sjái sömu setninguna sannaða á ymislegann hátt. Ef tíminn er
nógur þá reynir hann lærisveinana, annars ekki ...

Í neðrabekk kénfir hann Reikningslist og fylgir þar í Byrni. Hann hefir yfirfarið
... hvernig talið sé (Numeratio), 4 reikningsgreinir (species) í heilum, margs-
konar og brotnum tölum, sömuleiðis Proportionir, tugabrot, bókstafa reikning,
kvaðratrætur og veldi; þetta hefir hann kénnt meira practice, enn theoretice;
hann lætur því duga að kénna lærisveinunum í neðrabekk að reikna, og sýna til
hvers aðferðirnar séu. Þegar bókstafareikningurinn byrjar, útskírir hann hvers
vegna bókstafir séu hentugri enn tölur, og sýnir ýmisleg dæmi uppá positiv og
negativ stærðir, o.s.fr. (Jón Jónsson, 1841, bls. 22)

Þar sem fylgt er Byrni, sem þarna var svo nefndur, er átt við danska kennslubókahöfund-
inn Hans Outzen Björn. Bók hans, *Lærebog i Arithmetiken*, var gefin út 1806. Georg F.
Ursin (1797–1849) var einnig kunnur höfundur kennslubóka og Jónas Hallgrímsson þýddi
stjörnufræði hans á íslensku. Björn kenndi í fyrstu bækur eftir Björn og Ursin, en síðan
eftir aðra höfunda, m.a. Christian Ramus (1806–1856), L.S. Fallesen (1807–1840) og
Adolph Steen (1816–1886). Dönsku skólayfirvöldin, Den Kongelige Direction for Universi-
tetet og de lærde Skoler, sáu til þess að nýjustu kennslubækur bærust skólanum reglu-
lega (Kristín Bjarnadóttir, 2006).

Björn ritaði sjálfur skýrslu sína fyrir skólaárið 1841–1842:

Hjá efrabekkingum yfirfór ég reikningsfræðina (þ.e. bæði talna- og bókstafa-
reikning ásamt með Algebra) eptir Ursins lærdómsbók, þannig: að eg fyrst las
upp af bókinni hvörja grein, þó á íslensku, sleppti síðan bókinni, og sýndi hið
sama og sannaði á tölblunni, og útskírði munnlega eptir sem verða vildi og
tímin leyfði. En þætti mér það ekki verða nógu greinilegt eða reglulegt, sem
skyldi, en vildi ekki eyða leingri tíma þartil, eða vildi bæta þar við einhvörju, eða
sanna øðruvísi, þá skrifaði eg það upp heima hjá mér og afhendti síðan nærsta
dag í skólanum. (Jón Jónsson, 1842, bls. 14–15)

Skýrslur sem þessar segja ekki aðeins frá því hvaða efni var kénnt heldur veita dýrmæta
innsýn í hvernig kennslan fór fram. Björn las uppúr kennslubókinni og þýddi jafnharðan,
sleppti síðan bókinni og sýndi sama efnið á töflunni og útskírði munnlega. Gengi það ekki
skrifaði hann textann upp heima hjá sér til að koma með í skólann næsta dag. Ummæli
þessi gætu bent til þess að nemendur hafi ekki sjálfir haft kennslubók undir höndum. Páll
Melsteð minntist kennara síns í *Endurminningum*:

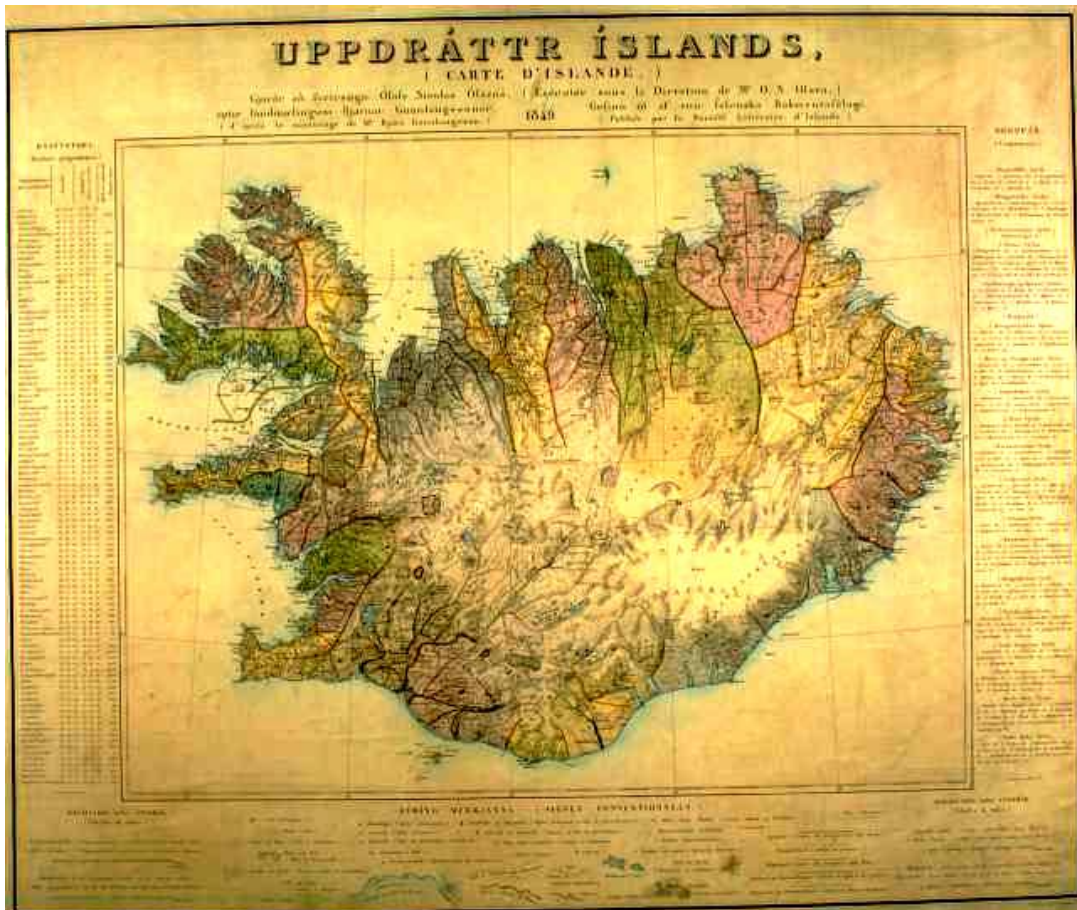
Björn Gunnlögsen kenndi í neðri bekk reikning, dönsku, íslensku og landa-
fræði, í efri bekk geometriu og landafræði. Meiri stjörnu- og stærðfræðingur
mun vart hafa verið á þessu landi en Björn Gunnlaugsson, og gat kénnt stærð-
fræðina vel, en hann gekk ekki eftir því, að við lærðum hana. Hann spurði okk-
ur einatt: skiljið þið þetta? Við sögðum já, en sögðum stundum ósatt; þá vant-
aði að láta okkur sýna, að við kynnum að reikna dæmið rétt.

(Páll Melsteð, 1912, bls. 28)

Páll sagði líka að Björn hefði oft verið utan við sig og talað við sjálfan sig en enginn nemandi hefði hlegið að honum og þeir dáðust allir að honum, hann var sannur spekingur í þeirra augum. Þrátt fyrir þennan vitnisburð gekk íslenskum stúdentum bærilega í lærdómsprófum í stærðfræði í Kaupmannahöfn og engu verr en í sögu og jafnvel latneskum stíl samkvæmt því sem segir í viðauka við skýrslu um Lærða skólann í Reykjavík skólaárið 1851–1852 (Bjarni Jónsson, 1852).

Landmælingar Björns

Björn stundaði landmælingar í þrettán ár, sumrin 1831–43 að sumrinu 1836 frátöldu þegar erfitt veðurfar hindraði. Ferðir hans stóðu að jafnaði í um 100 daga á ári (P[áll Melsteð] og Björn Jónsson, 1883). Mælingar hans urðu grundvöllur að Íslandskorti sem Hið íslenska bókmenntafélag gaf út árin 1844 og 1849 (sjá *Mynd 1*). Í upphafi hafði áætlunin verið sú að mæla hverja sýslu fyrir sig og búa til sérkort af þeim en vegna mikils kostnaðar var hætt við það og ákveðið að búa til heildarkort af landinu á fjórum blöðum (Íslandskort Björns Gunnlaugssonar). Mælingarnar einar nægja til að halda nafni Björns á lofti í Íslandssögunni. Næstu hálfu öld voru öll Íslandskort meira eða minna byggð á mælingum Björns og hlutverki Íslandskorts Björns var ekki lokið fyrr en 1944 að búið var að prenta ný kort af landinu öllu, byggð á nýjum og fullkomnari mælingum (Haraldur Sigurðsson, 1982, bls. 13).



Mynd 1 – Uppdráttur Íslands byggður á mælingum Björns Gunnlaugssonar og gefinn út 1844 (Íslandskort Björns Gunnlaugssonar).

Efni *Tölvísi*

Þegar árið 1855 hafði verið á málgað við Björn að skrifa bók um stærðfræði fyrir Hið íslenska bókmenntafélag. Björn átti í bréfaskiptum við Jón Sigurðsson (1811–1879), forseta

Bókmenntafélagsins í Kaupmannahöfn. Hann skrifaði Jóni hinn 12. ágúst 1861. Meginefni bréfsins var um mælingar á Þingvöllum, sem Jón hafði beðið Björn um að gera, en í leiðinni nefndi Björn bók sem hann hafði í smíðum fyrir Bókmenntafélagið:

Jeg hef verið í sumar að keppast við reikningsbókina, sem félagið so kallar, og stendur til að jeg sýni félaginu 40 arkir skrifaðar með minni hendi nú á félagsfundi. Það er hin theoretiska arithmetik, þó hinu practiska sé blandað þarí með, þá matti jeg það minna, þar þær íslenzku reikningsbækur hafa það. Jeg kalla þessa reikningsbók Tölvísi, eins og Konráð Gíslason hefur yfir Arithmetik, og sem er í Snorra eddu. Eptir því sem ég hef farið í þetta, hef jeg sett þar í margt, sem ekki er algengt, og ætlast til að þar verði allt sem í skolum er kénnt og jafnvel fleira. (Lbs. 2590, 4to)

Björn ætlaði sem sagt að bæta við það sem þegar hafði birst í fyrri íslenskum kennslubókum í reikningi og auðga þannig íslenskar bókmenntir á sviði stærðfræðinnar. Björn afhenti Bókmenntafélaginu um 40 handritaðar arkir í sama mánuði, ágúst 1861, og þáði fyrir það 100 ríkisdali. Umsamin þóknun var 16 ríkisdalir fyrir hverja prentaða örk. Bókin var prentuð í Prentsmiðju Einars Þórðarsonar og gefin út árið 1865, 25 prentaðar arkir alls eða 400 blaðsíður með 288 tölusettum greinum. Þakkarbréf frá Birni var lesið upp á fundi félagsins í apríl 1866. Björn færði félaginu handritið að seinni hluta *Tölvísi* í október 1867. Hann tók það aftur til endurskoðunar og afhenti lokaútgáfu þess í maí 1868 (*Fundabók hins íslenzka Bókmentafélags í Reykjavík 1816 til 1879*).

Bókin var send öllum félagsmönnum Bókmenntafélagsins sem voru þá rúmlega 700 (Sigurður Líndal, munnleg heimild), um 1% íbúa á landinu á um það bil 7% heimila. Samanlagður fjöldi nemenda Björns var um 300 og þeir voru líklega hinir einu sem gátu skilið textann. Eftir var 251 grein á 810 handrituðum örkum (Lbs. 2397, 4to). Hvorki reyndist grundvöllur fyrir að gefa seinni hlutann út né kennslubók í flatarmálsfræði sem Björn bauð félaginu einnig.

Yfirlit yfir *Tölvísi*

Bókinni fylgir ekki efnisyfirlit og kaflafyrirsagnir eru mjög smáar. Handritinu, sem geymir seinni hluta *Tölvísi*, fylgir efnisyfirlit yfir allt ritið. Hefur væntanlega átt að prenta það þegar bókin væri öll komin út. Hér er lauslegt yfirlit yfir efni alls ritsins, prentaðs og handritaðs, ásamt blaðsíðufjölda. Sum staðar er orðfæri Björns haldið en annars staðar er það fært til nútímahorfs ef það telst skiljanlegra. Margir kaflanna hefjast á skýringum á orðum, „orðþýðingum“.

- Inngangur – 4 prentaðar blaðsíður.
 - Tala; stærð; eining; viðkenndar og óviðkenndar tölur; tilteknar og ótilteknar tölur; málnotkun.
- Talning – 7 prentaðar blaðsíður.
 - Hvað það sé að telja; hin eðlilega talnaröð; að lesa tölu í tugakerfi; ýmisleg talnakerfi.
- Reikniaðgerðirnar fjórar með heilum tölum og bókstafareikningi.
 - Samlagning og frádráttur – 30 prentaðar blaðsíður.
 - Margföldun og deiling – 60 prentaðar blaðsíður.
- Almenn brot – 34 prentaðar blaðsíður.
- Talnafræði: nokkur eðli heilla talna – 75 prentaðar blaðsíður.
 - Leifareikningur; frumtölur; deilanleiki; Reiknirit Evklíðs; Litla regla Fermats.
- Tugabrot – 102 prentaðar blaðsíður.

- Merking tölustafanna í tugabroti; reikniaðgerðir í tugabrotum; lotubundin tugabrot; skekkjumörk.
- Veldi og rætur – 73 prentaðar blaðsíður.
 - Veldareglur; rötardráttur; $\sqrt[n]{1}$; óræðar rætur; teningsrót, fjórða rót og fimmta rót; tvíntölur; tvíliðusetningin, einnig útvíkkuð fyrir margliður.
- Keðjubrot – 12 prentaðar blaðsíður og 63 handritaðar síður.
 - Námundun brota og óræðra talna.
- Stærsti samdeilir margliðna af einni breytistærð eða fleiri – 11 handritaðar síður.
- Hlutföll og hlutfallajöfnur – 141 handritaðar síður.
 - Hlutfall; ýmsar umritanir og samsetningar hlutfallajafna; miðhlutfalla stærðir; hrein og rúmfræðileg meðaltöl og ójafna þeirra á milli; þýtt (harmonískt) meðaltal; samsett þríliða; félagsregla; öfug þríliða; eðlismassi.
- Jöfnur – 482 handritaðar síður.
 - Fyrsta og annars stigs jöfnur með einni og tveimur óþekktum stærðum; ferningsrótajöfnur;
 - Fall (functio); margliður; hvernig stuðlar staðlaðrar margliðu eru einföldu samhverfu föllin af rótunum; lausnir línulegra jöfnuhneppa með jafnmörgum jöfnum og óþekktum stærðum (nú nefnd Cramers regla); ræðar rætur margliðu með ræðum stuðlum; námundun með aðferð Newtons;
 - Afleiður falla (Lagrange fallareikningur); Taylors röð; setning Fouriers um efra mark á fjölda núllstöðva margliðu milli gefinna punkta út frá formerkjabreytingum allra afleiðna fallsins í punktunum; setning Kästners um ímyndaðar rætur;
 - Þriðja stigs jöfnur og regla Cardanos; fjórða stigs jöfnur;
 - Línulegar díófantískar jöfnur;
 - Vísisjöfnur; lograr.
- Runur – 47 handritaðar síður.
 - Endanlegar jafnmuna-, jafnhlutfalla- og þýðar runur.
- Óendanlegar raðir – 45 handritaðar síður.
 - Lograr; samleitnar og ósamleitnar raðir.
- Vextir, jafngreiðsluraðir – 14 handritaðar síður.
- Raðanir, umraðanir, samantektir – 8 handritaðar síður.

Efni *Tölvísi* er yfirgrípsmikið en fer ekki langt út fyrir mörk þess námsefnis sem Björn gat kennt við Lærða skólann, hefði hann haft til þess nægan tíma. Skólaárið var stutt og markaðist af búskaparháttum; það hófst eftir réttir á haustin og því lauk fyrir sauðburð. Kennslan var Birni ofarlega í huga; þaðan og úr erlendu kennslubókunum, sem hann kenndi, hafði hann sína stærðfræðilegu næringu. *Tölvísi* endurspeglar að nokkru verkin eftir Euler, Lagrange og Kästner, sem Björn las á námsárunum en hann vitnaði líka í verk eftir Fermat, Leibniz, MacLaurin, d'Alembert, Fourier, Gauss og Bourguet, öll rituð fyrir 1822 þegar höfundur kvaddi Kaupmannahöfn og hvarf til Íslands. Björn nefndi ekki neinn stærðfræðing í *Tölvísi* yngri en þessa en vitnaði í ýmsa danska samtíma kennslubóka-höfunda, s.s. Ramus, Fallesen o.fl. Þetta bendir til þess að Björn hafi búið við einsemd í stærðfræðilegum efnum eftir að hann flutti heim til Íslands og hugmyndir hans hafi þroskast í einstæða átt miðað við það sem gerðist á meginlandi Evrópu á níjándu öld.

Hugmyndir Björns um tölur og stærðir

Öldum saman glímdu menn við talnahugtakið. Íslömsk menning stóð með miklum blóma á áttundu og níundu öld e. Kr. Meðal annars urðu til rit um það sem þá nefndist indversk talnaritun en nú arabísk. Al-Khwarizmi (u.þ.b. 780–850) ritaði grundvallarverk um reikning

og algebru og Evrópumenn tóku að þýða rit hans á latínu á tólftu öld. *Dixit Algorizmi* er ein þessara þýðinga. Þar segir:

Og ég hef þegar útskýrt í bókinni um algebru og almucabalah, það er um umritun og samanburð, að sérhver tala er samsett og sérhver tala er samsett úr einingum. Eininguna er þess vegna að finna í sérhverri tölu. Og þetta er það sem sagt er í annarri bók um reikning að einingin er rót allrar tölu og utan talna.
(Allard, 1992, bls. 1, þýðing greinarhöfundar)¹

Talið er að þessa hugmynd um eininguna sem rót allrar tölu utan talna megi rekja til Nikomachusar (u.þ.b. 60–120) og hún sé túlkun hans á skilgreiningu 2 í 7. bók Evklíðs (um 300), *Frumþáttum*. Trúr þeirri hugmynd segir Björn stærðir tvenns konar, samfelldar (l. *continuae*) og sundurlausar (l. *discretæ*):

Hinar samfeldu eru heildir, hvar enginn skilnaður er milli partanna, svo sem lengd, tímabil, afl, flýtir. Þær sundurlausu eru söfn samkynja einstakra hluta eða eininga, t.a.m. flokkur manna, ríkisdalatal og yfirhöfuð öll tala ... Sú kunnuga stærð, sem höfð er til samanburðar, nefnist opt kvarði ... en í tölvísinni heitir kvarðinn Eining eða einn (Eind) og þar af leiðir, að tala (numerus) er sundurlausrar stærðar samanburður við eininguna eða einn.

(Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 1–2)

Hér kemur ekki beinlínis fram að einingin sé ekki tala en þessi skilgreining á talnahugtakinu olli Birni vandræðum þegar fram í bókina sótti. Geta má þess að Stevin (1548–1620) og einnig Euler höfðu horfið frá hinni fornu skilgreiningu. Stevin sýndi beinlínis fram á að hún gæti ekki staðist. Ef einn væri ekki tala yrði svarið aftur þrjú þegar einn væri dreginn frá þremur sem væri fráleitt (Stevin, 1585).

Tengsl *Tölvísi* við líf Björns og lífsviðhorf

Tölvísi endurspeglar líf Björns. Búhyggindi koma fram í mörgum dæmum, hvort sem þau varða búskaparhætti nítjándu aldar eða landmælingar. Úrvinnsla landmælinganna endurspeglast í mikilli áherslu á nákvæmni í reikningum, skekkjumörk og tölulegar aðferðir. Umhyggja Björns fyrir búskap kemur hins vegar fram í dæmum og samlíkingum sem hann valdi til að skýra reglur. Björn valdi aldrei dæmi skemmtigildis þeirra vegna heldur notaði hann þau sem umgjörð um stærðfræðina sem hann vildi koma á framfæri.

Heimspekingurinn og trúmaðurinn Björn birtist í heimspékilegum og trúarlegum hugleiðingum hans um eðli núllsins og ímyndaðra talna (tvinntalna, sem eru ekki rauntölur), eðli veldareglanna og almennt um stærðfræðina sem guðdómleg vísindi. Dæmi verða rakin til stuðnings þessum staðhæfingum.

Björn Gunnlaugsson bóndi

Lestargangur og algebrubreytur

Björn hóf *Tölvísi* á að kynna stærðir og sagði þær annaðhvort tiltekna þegar tilgreint væri hve oft einingin væri endurtekin í þeim, ellegar ótiltekna þegar það væri ekki gert. Þessar ótilteknu tölur gætu menn ímyndað sér þó að menn vissu ekki töluna sjálfa. Menn gætu jafnvel ákvarðað margt um þær, sundrað þær (svo!) og sameinað á margan hátt. Þarna var Björn að sjálfsögðu að innleiða óþekktar, algebrískar stærðir. Hann notaði kunnulega mynd til þess, lest hesta sem fór ofan í Reykjavík, algenga sjón á nítjándu öld:

¹ Et iam patefeci in libro algebr et almucabalah, idest restaurationis et oppositionis, quod uniuersus numerus sit compositus et quod uniuersus numerus componatur super unum. Unum ergo inuenitur in uniuerso numero. Et hoc est quod in alio libro arithmetice dicitur quia unum est radix uniuersi numeri et est extra numerum.

Hallgrímur sá snemma dags stóra lest fara ofan í Reykjavík; skömmu síðar sá hann aðra enn stærri fara þangað; svo kom hin þriðja, er í voru eins margir hestar sem í hinum fyrri báðum. Út af þessu má margt álykta: t.a.m. að hestafjölda þeim, sem á þeim tíma fór ofan í Reykjavík, megi skipta í tvo helminga, svo jafnmargir hestar verði í báðum; að það hafi verið að minsta kosti fimmtíu hestar alls, ef í hinni fyrstu hafa verið tólf; að þar hafi engan veginn færri verið alls en ferföld fyrsta lestin að tillögðum tveimur hestum o.s.frv.

(Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 2)

Björn sagði í framhaldinu að reikningslistin eða talnalistinn kenndi mönnum að reikna með tilteknum tölum en þar á móti sagði hann bókstafareikninginn og algebru kenna að reikna með ótilteknum tölum. Þarna lagði Björn upp inntak bókar sinnar. Hann hóf ævinlega umfjöllun um hvert efni með tölum og leiddi lesandann síðan yfir í bókstafareikninginn, stundum æði bratt ef miðað er við mögulegan lesendahóp á nítjándu öld á Íslandi.

Fuglagátan

Í handriti að síðari hluta *Tölvísi* eru alkunnar vísur. Þar er bundin í rím gömul gáta um þrjár tegundir fugla. Vinnumaður mátti veiða fugla að verðgildi þrjátíu álnir og fjöldi fugla skyldi vera hinn sami. Saga gátunnar er rakin til fornra kínverskra stærðfræðirita (Tropfke, 1989, bls. 572) en hún var orðin íslenskur húsgangur þegar hér var komið sögu. Björn sagði í neðanmálgrein:

Þetta dæmi stóð sem gáta í gömlu stafrofskveri, er kallaðist Gunnarskver, en höfundur þess, Gunnar Pálsson, Skólameistari á Hólum en síðan Prófastur í Dalasýslu kallaði það Stöfunarbarn. Þetta stafrofskver var merkilegt fyrir mér, því móðir mín sæla Ólöf Björnsdóttir lét mig stafa á það, þegar jeg var stöfunarbarn.

(Lbs. 2397, 4to, bls. 1375)

Gátan hljóðar svo:

Vinnumaðurinn vildi fá
verkalaunin bónda hjá,
eg sá fljúga fugla þrjá,
flýtum oss að veiða þá.

Andir fyrir alin tvær,
álptin jöfn við fjórar þær.
Tittlingana tíu nær,
tók eg fyrir alin í gjær.

Af fuglakyni þessu þá,
til þrjátíu álna reikna má,
þó vil eg ekki fleiri fá,
en fugl og alin standist á.

(Lbs. 2397, 4to, bls. 1372)

Björn notaði gátuna til að sýna lausn á díófantískum jöfnum, þ.e. jöfnum með heiltölulausnum; í þessu tilviki tveimur jöfnum með þremur óþekktum stærðum.

Jöfnurnar eru:

$$x + y + z = 30$$

$$\frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{10}z = 30$$

þar sem x táknar fjölda anda, y álfra og z titlinga.

Afleiðing af jöfnunum er jafnan

$$4x + 19y = 270$$

og það nægir að leysa hana, því síðan má finna z með innsetningu í fyrstu jöfnuna. Björn leysti jöfnuna með keðjubrotum enda var ætlun hans með dæminu að kynna hagnýtingu keðjubrota. Það er leitt, því að hægt er að leysa jöfnuna með mun einfaldara hætti. Höfundur fann margar lausnir með keðjubrotaaðferðinni (sjá *Töflu 1*).

Tafla 1 – Lausn á fuglagátunni					
	Fjöldi	1. lausn	2. lausn	3. lausn	4. lausn
Endur	x	1	20	39	58
Álftir	y	14	10	6	2
Tittlingar	z	15	0	-15	-30
Summa fuglanna		30	30	30	30

Fyrsta lausnin, þar sem fuglarnir þrjátíu voru 1 önd, 14 álftir og 15 tittlingar, er hin eina sem Björn taldi gilda þar eð 0 og neikvæðar fuglatölur væru óhafandi. Svo bætti Björn við að verja megi allar lausnirnar með því að segja að tittlingarnir hafi engir verið og að vinnu- maðurinn hafi galdið húsbóndanum til baka neikvæðu tittlingana. Björn sýndi fyrstu lausnina síðan einnig í bundnu máli:

Alptir fjortan eru hér til
og einum titling fleira,
á einni gjöri eg önd þér skil,
ekki færðu meira.

Að lokum setti Björn verð fuglanna upp í töflu (sjá *Töflu 2*).

Tafla 2 – Verð fuglanna				
	1. lausn	2. lausn	3. lausn	4. lausn
Verð andanna	$\frac{1}{2}$	10	$19 \frac{1}{2}$	29
Verð álftanna	28	20	12	4
Verð tittlinganna	$1 \frac{1}{2}$	0	$-1 \frac{1}{2}$	-3
Vinumannskaup	30	30	30	30 álnir

Beitarþol

Jón Guðmundsson (1807–1875), síðar ritstjóri Þjóðólfs, rakti dæmi um stærð beitolands til hagbeitar fyrir hross á bls. 166 í bók sinni *Reikningslist, einkum handa leikmönnum* (Jón Guðmundsson, 1841). Jón tók hrossabeitina sem dæmi um að þriliða ætti ekki alltaf við. Taka þyrfti tillit til árstíma og þess að hain sprytti þegar reikna ætti stærð beitolands fyrir breytilegan fjölda skepna. Jón varð stúdent frá Bessastaðaskóla árið 1832 þar sem hann nam stærðfræði hjá Birni Gunnlaugssyni. Björn tók viðfangsefnið til umfjöllunar í handritshluta *Tölvísi* og gerði því fræðileg skil. Dæmi Björns fjallaði um grasbit kúa þar sem grasvöxturinn var tekinn með í reikninginn. Dæmið var sett fram til að sýna sameiginlega lausn tveggja jafna með tveimur óþekktum stærðum. Megininntak dæmisins var svohljóðandi í styttri útgáfu:

Grasbitið á ferfaðm á dag á tilteknu svæði að stærð p með fjöldanum m kúm þar sem hver kýr bitur g einingar á dag er:

$$(m/p) \cdot g$$

Frá því þarf að draga **grasvöxtinn á ferfaðm, h**

$$(m/p) \cdot g - h$$

Með því að nota tvö þekkt tilvik gat Björn reiknað hlutfallið milli h og g , þannig að

$$h/g = 1/250$$

Sé **upprunaleg grashæð nefnd G og grasið nauðbitið á n dögum**, er

$$G = ((m/p) \cdot g - h) \cdot n$$

Talan $G = 196$ (án einingar), upprunalega grashæðin, fæst út frá tveimur þekktum tilvikum

svo að talan m'' kýr á beit á
 $p'' = 600$ ferfaðma engi í $n'' = 84$ daga er

$$m'' = (G + h \cdot n'') \cdot p'' / (g \cdot n'') = ((196 + 1 \cdot 84) \cdot 600) / (250 \cdot 84) = 8$$

svo að fjöldi kúa á beit á 600 ferfaðma engi í 84 daga er **$m'' = 8$** .

(Lbs. 2397, bls. 1165–1173)

Lausnin tekur átta handskrifaðar síður og hefði getað vakið áhuga fróðleiksfúss bónda ef hún hefði komist á prent. Hér er um að ræða tilraun til að reikna beitarþol með vísindalegum hætti. Björn þurfti að gefa sér forsendur og beita námundaraðferðum en hann vissi hvað hann mátti leyfa sér í því efni. Væntanlega hefur hann gefið fólki sínu fyrirmæli um beit fyrir kýr sínar, byggð á fræðilegum grunni, áður en hann hélt í mælileiðangrana sumar hvert.

Björn Gunnlaugsson, heimspekingur og 18. aldar stærðfræðingur

Björn háði harða glímu við jaðra talnakerfisins, hugmyndirnar um óendanleikann og núllið; hvort núll væri tala eða ekki og hvert væri hlutverk óendanleikans í stærðfræði. Þá glímdi hann við að skýra tvinntölur sem hann nefndi „imaginærar“ stærðir. Þær höfðu vart unnið sér sess, og alls ekki í kennslubókum, áður en Björn hvarf til kennslustarfa á Íslandi.

Skekkjumat, vísindi og trú

Rúmur fjórðungur hins prentaða hluta *Tölvísi* fjallar um tugabrot, tölulegar aðferðir og skekkjumörk. Þar var Björn á heimavelli. Vinna hans við landmælingar krafðist nákvæmni í útreikningum og skýrra hugmynda um skekkjumörk. Of langt mál yrði að greina ítarlega frá þeim. Aðeins skyldi minnast þess að allir útreikningar voru gerðir í höndum á blaði. Námundunaraðferðir voru nauðsynlegar þegar tugabrot voru annars vegar og skakkann, sem hann nefndi svo, þurfti að meta. Fjöldi aukastafa skipti verulegu máli varðandi tíma við útreikninga. Ennfremur þurfti að hafa ýmis ráð til að kanna hvort rétt væri reiknað.

Björn skýrði vandlega níupróf, sem algengt var að beita við almenna útreikninga fyrir tíma reiknivéla, og víkkaði það út í sams konar próf með ellefu; elleftarprófið, kallaði hann það. Síðan varaði hann við því að telja prófin óbrigðul. Ef báðum aðferðum væri beitt væru líkur á að ein skekkja af hverjum 99 uppgötvaðist ekki. Ástæðuna fyrir því að hafa dvalið lengi við leifaprófin með níu og ellefu sagði hann ekki vera svo að skilja að hann álitir þau gagnleg til daglegrar notkunar „heldur er það af því vér viljum kynna oss eðli talnanna.“

Því í vísindum eiga menn ekki að meta lærdóma einungis eptir skildingaverði, því maðurinn (eða mannsins andi) lifir ekki af einusaman brauði.“ (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 193).

Núll og óendanlegt

Jafnframt því sem Björn skilgreindi samfelldar og sundurlausar stærðir og hvað tala væri gerði hann grein fyrir núllinu. Núllið þýddi að þar væri engin eining, heldur autt rúm eða sæti (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 4).

Þegar Björn kynnti neikvæðar tölur í rununni ... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ sagði hann um núllið:

Millum þessara tveggja óendanlegu raða stendur 0 í miðju, sem hvorki er játandi né neitandi, og horfir í hvoruga áttina, ellegar eins vel bæði játandi og neitandi og horfandi í báðar. Í þessari útvíðkuðu talnaröð kallast *negatifu* stærðirnar minni en 0, til þess að samhljóðun verði; ... Sömuleiðis er ∞ (óendanlega stór) meira en allar endanlegar játandi stærðir, 0 minna en allar játandi stærðir, neitandi stærðirnar minni en 0, og loksins $-\infty$ (*negatíf* óendanlega stór) minna en allar endanlegar neitandi stærðir.

(Björn Gunnlaugsson, 1865, grein 35, bls. 26)

Hér fékk óendanlegt, ∞ , stöðu hliðstæða núlli. Núllið fékk tiltekið gildi innan talnaraðarinnar og hlutverk í frádrætti. Öðru máli gildi þegar kom að deilingu:

Kvótinn ∞ getur ekki stærri orðið, vegna þess að divisor 0 getur ekki minni orðið. Bæði 0 og ∞ eru því stærðarinnar takmörk. Núll er raunar engin stærð, heldur er það minna en allar stærðir; eins er ∞ engin stærð, heldur stærra en allar stærðir. Að 0 sé minna en nokkur stærð, á hér að takast í annari merkingu heldur en (35) seinast, þar sem neitandi stærðirnar eru kallaðar minni en 0. Af (35) er það raunar auðséð, að 0 verður að vera minna en neitandi stærðirnar eptir deilingarskoðun, þó það sé það ekki eptir frádrágingarskoðun, þar það stendur í miðju milli tveggja óendanlegra raða, og neitandi stærðirnar eru raunar viðsnúnar stærðir reiknaðar frá þessari sömu miðju í gagnstæða átt við hinar játandi. Þar af sést, að 0 eða miðjan sjálf er engin stærð, heldur útgangsdepill stærðanna, hafandi sjálfur enga stærð og ekkert merki, + eða –.

(Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 97)

Um stærðir má segja, að þær sé jafnar, en ekki um 0 eða ∞ , sem ekki eru stærðir, heldur stærðarinnar takmörk, og kemst hún ekki inn í þau og ekki heldur út í þau. Því 0 liggur fyrir innan alla stærð, en ∞ fyrir utan hana. Það er líka áhorfsmál að kalla 0 (ekkert) óendanlega lítið og ∞ óendanlega stórt, (þó menn gjöri það), því lítið og stórt tilheyrir stærðunum, en ekki því sem ekki eru stærðir. Betra væri að kalla það óendanlegt innra og óendanlegt ytra, eða stærðarinnar innra og ytra takmark. Núll mætti og kallast stærðarinnar frástefnumark (*terminus a quo*) og ∞ hennar aðstefnumark, (*terminus ad quem*).

(Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 99)

Björn var kominn í veruleg vandræði með núllið þegar hann sagði: „Að 0 sé minna en nokkur stærð, á hér að takast í annarri merkingu heldur en (35) seinast, þar sem neitandi stærðirnar eru kallaðar minni en 0. Af (35) er það ... auðséð að 0 verður að vera minna en neitandi stærðirnar eptir deilingarskoðun, þó það sé það ekki eptir frádrágingarskoðun ...“ Björn taldi þannig núllið standa í miðri talnaröðinni í frádrætti en utan við hana í deilingu.

Björn las líklega bókaröð eftir þýska prófessorinn Kästner, *Anfangsgründe*. Í *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*, útgefinni 1758 og 1792, segir:

Þetta orðasamband **minna en ekkert** gerir ráð fyrir merkingu orðsins **ekkert** sem á vissan hátt skal líta á sem **eitthvað** (nihilum relativum) og sem greinir það frá því **engu** (nihilum absolutum) sem litið er á án tengsla við annað ... Líti menn ekki á orðasambandið **minna en ekkert** í þessari merkingu verður það rangt og hefur raunar orðið til þess að leiða sérfræðinga í stærðfræði til rangs skilnings á neikvæðum stærðum ...²

(Kästner, 1792, bls. 73–74, þýðing greinarhöfundar)

Þessi tilvitnun tengist mismun milli hins heimspekilega/metafýsiska einskis og hins stærðfræðilega afstæða núlls, sem d'Alembert hafði hafnað en Þjóðverjar haldið fram (Schubring, 2005). *Nihilum relativum* gagnaði Birni í frádrætti en ekki í deilingu. Honum var hugleikin umræða 18. aldar um núllið. Hann gat ekki litið á það sem tölu, þar sem ekki var hægt að bera það saman við eininguna, og heldur ekki sem stærð eins og hér kemur fram. En þrátt fyrir þessar vangaveltur Björns og annarra, sem áttu hugmyndafræðilegar rætur í fornum ritum, þá reiknuðu þeir samt með núlli eins og nauðsyn krafði. Björn Gunnlaugsson notfærði sér talnakerfi sem hefur bæði núll og einn. Þótt hann væri í vandræðum með hvort kalla ætti núll tölu eða eitthvað annað notaði hann það í reikningum eins og hverja aðra tölu án nokkurra samviskukvala.

Óendanleikinn, eilífðin og stærðarinnar takmörk

Björn tók slaginn við óendanlegar raðir, *series*, með því að deila stærðinni $1-x$ upp í 1. Útkoman er vel þekkt, síhækkandi veldi á x . Björn gaf sér talnabilið $-1 < x < 1$:

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots \text{ (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 93)}$$

Björn setti gildið $x = \frac{1}{2}$ inn í jöfnuna. Þá tók vinstri hlið jöfnunnar gildið 2. Hann sagði:

... þá er auðsætt að maður tekur alt af helminginn af því sem eptir er; en með þessu móti nær maður aldrei summunni, þó hann væri að þessu til eilífðar, en nálgast þó summuna eilíflega; það er því auðséð, að 2 er einmitt sú tala sem röðin miðar á, og kemst aldrei fram yfir; til að ná 2 þarf eilífð, en til að komast lengra þarf meir en eilífð. Sú óendanlega *series* nær eilífðinni, því hún liggur í henni alt af, og hefur eilíflega í henni legið, þó sá sem reiknar nái þangað aldrei með áframhaldi. Það sem er eilíft er eilíflega eilíft og þarf ekki að ná eilífðinni, en það sem ekki er eilíft getur aldrei orðið eilíft.

(Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 94)

„Það sem er eilíft er eilíflega eilíft og þarf ekki að ná eilífðinni, en það sem ekki er eilíft getur aldrei orðið eilíft“, sagði Björn. Hann leit stærðfræðilegan óendanleika sömu augum og eilífðina í skilningi kristindómsins.

Björn hélt áfram og spurði hvernig liðirnir yrðu á að líta ef eilífðinni yrði náð. Þá yrði jafnan:

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^\infty \text{ (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 95)}$$

² Dieser Ausdruck **weniger als nichts**, setzt also eine Bedeutung des Wortes **Nichts** zum voraus, die sich auf eine gewisse Art das **Etwas** zu betrachten beziehet (nihilum relativum) welche sich von dem **Nichts** ohne Beziehung genommen (nihilum absolutum) unterscheiden liesse ... Nimmt man den Ausdruck **weniger als nichts** nicht in diesem Verstande, so ist er falsch, und hat wirklich Mathematikverständige zu irrigen Vorstellungen von den verneinenden Größen verführt.

og settu menn inn $x = \frac{1}{2}$, yrði $x^\infty = (1/2)^\infty = 1/\infty = 0$.

Síðan rannsakaði Björn jöfnuna $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n/(1-x)$ þegar $x = 1$. Þá fékk hann:

$$1/0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1^\infty/0 \text{ (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 96)}$$

Hér hefði fremur mátt búast við $1^n/0$ en $1^\infty/0$ sem síðasta lið en niðurstaðan er hin sama eða:

$$1/0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1/0$$

Að deilingin $1/0$ boði óendanlegt sagði Björn sjálf af því að hversu oft sem 0 væri dregið frá 1 sé sá eini alltaf óskertur eftir. Það afnám endi aldrei og því sé $1/0 = \infty$ (bls. 96). Jafnan leiddi því til þeirrar ályktunar hans að hið óendanlega gæti ekki tekið á móti neinum viðbæti. Þá væri komið út fyrir stærðarinnar takmörk, en stærðarinnar takmörk væru 0 og ∞ . Um hliðstæður við þetta sagði hann innan sviga:

(Eilífðin er t.d. ekki lengri, þó við hana bætist nokkrir dagar eða ár; eilífðin sem liggur fyrir Alexander stóra, er ekki lengri en eilífðin, sem liggur fyrir Napóleoni mikla, þó þessi komi til sögunnar seinna en hinn).

(Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 96)

Björn setti fram reiknireglur um ∞ og komst að þeirri niðurstöðu á bls. 98–99 að $\infty + \infty = \infty$ líkt og $0 + 0 = 0$, og hið sama gildi um margföldun. „Stærðarinnar eiginlegleiki að stækka og minka er hér farinn“ sagði Björn (1865, bls. 96). Núll og óendanlegt voru því ekki stærðir og þess vegna ekki tölur heldur.

„Hin eilífu lögmál exponentanna“, brotnir veldisvísar og rætur

Björn var ósáttur við hvernig danskir höfundar túlkuðu veldareglurnar, til dæmis neikvæða veldisvísa. Hann sýndi fram á að nauðsyn krefði að $a^0 = 1$ og til dæmis væri a^0/a^2 jafnt a^{-2} . Að hans hyggju væri þetta lögmál *exponentanna* „æðra en nokkurt mannlegt samkomulag eða mannaþing. Það liggur í eðli stærðanna, sett af hinum eilífa.“ (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 320). Björn sagðist segja þetta af því að nokkrar danskar lærdómsbækur milli ára 1834 og 1846, þó góðar væru, tali um þetta sem mannlegt samkomulag og nefndi kennslubækur eftir Berg og Fallesen.

Björn mótmælti kennslubókahöfundunum Berg, Ramus og Fallesen enn þar sem þeir segðu „*man vedtager*“ um jafngildi brotinnar veldisvísa við rætur. Hann leit á það sem nauðsyn, eða eins og hann orðar það „eilíf lögmál“, að:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Þessi orðatiltæki þeirra sýnast mér líta svo út, eins og maðurinn hafi nokkurn hlut að skipa og skikka í stærðanna eilífu lögmálum. En raunar er það ekki meining þeirra; heldur þykjast þeir mega ráða teiknum sínum, og það játa eg þeir meg, svo lengi sem þau ekki fara að ljúga að þeim ... En svo farast þeim þannig orð um þetta málefni, eins og það sé *placita* (*Vedtægter*), sem eiga að vera *theoremata* (*Læresætningar*); ... það er eins og þessir menn hafi ... skoðað lærdóminn um *exponentinn* núll, hina *negatífu exponenta*, og nú hina brotnu *exponenta* sem mannaþingur (*placita* ...) En ... þar sem talað er um veldanna raðir ... sýnist mér vera röksemd fyrir, að þessir lærdómar sé æðri en mannaþingur.

(Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 331)

Björn leit þannig á rökstuddar niðurstöður stærðfræðinnar sem eilíf lögmál sem menn gætu ekki haggað, æðri en nokkrar manasetningar.

Ímynduðu stærðirnar

Björn (1865, bls. 344) kynnti *imaginariæ* stærðir, ef stærðir skyldi kalla, sagði hann, byggðar á $\sqrt{-1}$, sem gjarnan er táknað með „i“. Þar vísar i-ið í *imaginariæ* eða ímyndaðar stærðir. Nú eru þær nefndar „þvertölur“. Þvertölur eru venjulega samþættar við rauntölur og nefnast þá „tvinntölur“ með raunhluta og þverhluta. Raunar virðist sem Björn noti heitið „ímyndaðar tölur“ yfir tvinntölur sem ekki eru rauntölur og verður þeim skilningi haldið hér. Björn sagði um þær:

Þegar þær framkoma í reikningum, tákna þær tilveruleysi stærða, eins og í boglínufræðinni [*analytisk geometri*] má finna ótöluleg dæmi til; en þegar menn sjálfir innfæra þær í reikningsforskriftir, geta menn látið þær vinna upp hver aðra, að ekki verði annað eptir, en verulegar stærðir eins og í *trigonometriæ* ... Það tilveruleysi stærða, er ímynduðu stærðirnar tákna í boglínufræðinni, er öðruvísi en tilveruleysi það, sem núllið tákna. Núllið er útgangspunktur eða upphaf stærðarinnar og þaðan vex hún annaðhvort í *positift* eða *negatift* horf. En ímyndaða stærðin er gjörsamleg neitun allrar stærðarinnar, svo hún má hvorki vera *positif*, núll, né *negatif*, og heldur ekki ∞ , því ∞ er hin önnur samganga milli *positifs* og *negatifs*.

(Björn Gunnlaugsson, 1865, grein 251, bls. 347–348)

Björn sagði ímynduðu stærðina gjörsamlega neitun allrar stærðarinnar. Hann gat því hvorki talið ímynduðu tölurnar til talna né stærða. Hann tók nokkur dæmi úr boglínufræðinni [*analytisk geometri*] í grein 252 og ræddi ímynduðu lausnirnar á jöfnu hrings, $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, þegar $x^2 > a^2$, lausnirnar á jöfnu fleygboga, *parabola*, $y = \pm \sqrt{px}$, þegar $x < 0$, og lausnirnar á jöfnu breiðboga, *hyperbola*, $y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$, þegar x tekur gildi á bilinu milli $-a$ og $+a$ (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 348–350).

Björn hefur getað þekkt til verks Wenceslaus J. G. Karsten (1732–87), prófessors í stærðfræði í Bützow, síðar Halle í Þýskalandi þótt hann nefndi það ekki. Karsten ræddi möguleika á að gera rúmfræðilegan uppdrátt af ímynduðum stærðum í grein sem hann birti fyrst árið 1768 og síðar í endurskoðaðri útgáfu árið 1786. Hann setti fram dæmi um venslin á milli breiðboga með jöfnunni $x^2 - y^2 = 1$ og samsvarandi hrings $x^2 + z^2 = 1$ þar sem $z = y\sqrt{-1}$. Þegar x er látið taka gildið 0 í jöfnu breiðbogans verður lóðhnitið $y = \pm \sqrt{-1}$ og þegar x tekur gildi á milli -1 and 1 verða öll gildi lóðhnitanna, y , ímynduð. Öll lóðhnit hringsins verða ímynduð lóðhnit breiðbogans, og öfugt, öll lóðhnit breiðbogans verða ímynduð lóðhnit hringsins þegar $x^2 > 1$ (Schubring, 2001, bls. 142–143).

Þetta er einmitt sama mál og Björn var að glíma við að kynna löndum sínum í *Tölvísi*. Hugmyndir hans líkjast nokkuð hugmyndum Karstens. Rit Karstens frá 1786, *Mathematische Abhandlungen, theils durch eine Preisfrage der Königl. Pr. Acad. vom Jahr 1784 über das Mathematisch-Unendliche, theils durch andre neuere Untersuchungen veranlasst*, er til í Konunglegu bókhöðunni í Kaupmannahöfn og hefur vel getað verið þar á tímum Björns.

Er Björn hafði rætt breiðbogana eða hýperbólurnar sem hann svo nefndi sagði hann:

Enn nú merkilegri eru þó boglínur þær, sem eiga sér fráskilin egg, eða eggmyndaða bauga (eggbaugur, *Oval* á dönsku, þýzku og frakknesku) og fráskilda depla, þegar eggbaugurinn verður að punkti. Eggbaug hefir t.a.m.:

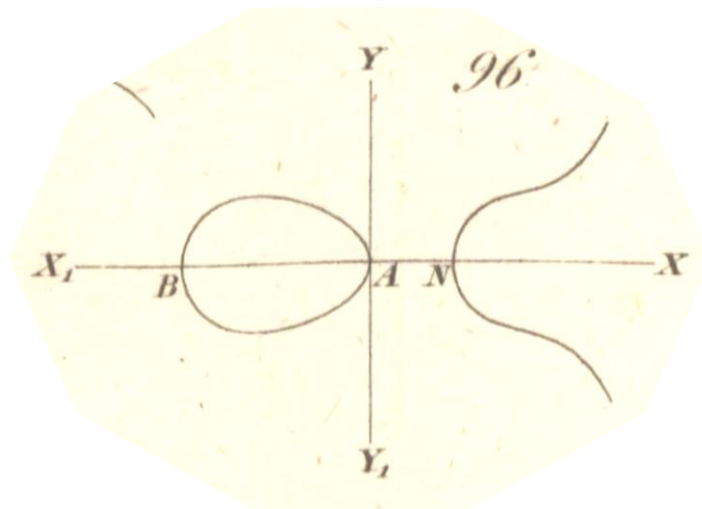
$$y = \pm \sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}}$$

og fráskilinn depil

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x-b}{a}}$$

(Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 350)

Björn ræddi ekkert um ímynduð hnit eggbaugsins en nefndi af þessu tilefni tvær bækur, *Analytisk Geometri* eftir Ramus og *Traitéés élémentaires de calcul différentiel et de calcul integral* eftir Bourguet, þar sem hann sagði myndir af þessum jöfnum upp dregnar (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 350). Uppdrátt af eggbaugnum má sjá á *Mynd 3*. Sennilega hefur Björn ekki átt kost á að láta prenta myndir af uppdráttum jafnanna í *Tölvísi*.



Mynd 3 – Eggbaugur í *Analytisk Geometri* eftir Chr. Ramus. Myndablað 17, mynd 96.

Bók Bourguet var gefin út 1810–1811 en kennslubók Ramus árið 1848. Bók Ramus bendir til þess að kennsla um tvinntölur hafi verið hafin í dönskum skólum. Fróðlegt er að sjá að Björn hefur fylgst með nýmælum eins og tvinntölurnar voru vissulega í dönskum kennslubókum, en skólinn fékk nýjar kennslubækur sendar reglulega frá dönsku yfirvöldunum eins og áður sagði. Og hann lagði út af ímynduðu stærðunum með sínum hætti:

Þó að ímynduðu stærðirnar sé algjörðar neitanir stærða eins og vér höfum séð í (252) sannað af boglínufræðinni, þá mega menn þó ekki halda, að dygð þeirra sé einungis þar í innifalin. Þær líkjast í stærðafræðinni loptsiglingunni í eðlisfræðinni, því hugurinn getur á hinu *imaginæra* loftskipi eins og hafið sig upp frá fastri jörðu, siglt fram og aftur í tilveruleysisins ginnungagapi og horfið svo til jarðarinnar aptur, þegar hann vill, og á þann jarðfasta klett sem honum þóknast. (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 350–351)

Hér skyldi þess minnst að *Tölvísi* var rituð árið 1865. Björn hefur getað átt við loftbelgi sem þá voru þekkt sem farartæki þegar hann talaði um loftskip, sem hann taldi hliðstæður ímynduðu talnanna.

Lokaorð

Björn Gunnlaugsson var farsæll maður. Á meðan hann gegndi embætti við Bessastaða-skóla bjó hann í Sviðsholti á Álftanesi og rak þar hefðbundinn búskap. Hann var tvígiftur og átti röggSAMAR eiginkonur sem léttu af honum búskaparamstri. Fyrri kona hans var Ragnheiður Bjarnadóttir (1787–1834). Þau eignuðust eina dóttur sem náði fullorðinsaldri, Ólöfu (1830–1874). Ólöf giftist Jens Sigurðssyni (1813–1872) rektor, bróður Jóns Sigurðssonar. Bræðurnir Jón og Jens voru báðir forsetar Hins íslenska bókmenntafélags, Jón í Kaupmannahöfn og Jens í Reykjavík. Meðal barna Ólafar og Jens var Björn Jensson (1852–1904) sem kenndi stærðfræði við Lærða skólann 1883–1904. Meðal nemenda Björns Jenssonar var Ólafur Daníelsson (1877–1957) stærðfræðingur sem hlaut einnig gullpening fyrir verðlaunapraut Hafnarháskóla í stærðfræði. Síðari kona Björns var Guðlaug Aradóttir (1804–1873) og voru þau barnlaus.

Björn Gunnlaugsson hlaut margvíslegan heiður. Hann varð riddari af Dannebrog og riddari af frönsku heiðursfylkingunni, og honum var veittur heiðurspeningur á heimssýningunni í París 1875. Hann naut virðingar meðal nemenda sinna og almennings en líklega fyrst og fremst fyrir landmælingar sínar og Íslandskortið. Ljóð hans, *Njóla*, þar sem hann óf saman margvíslega þræði trúar og vísinda til þess að setja saman heildarkenningu um alheiminn og tilgang hans, naut einnig mikillar alþýðuhylli (Einar H. Guðmundsson, 2003). Björn lést í hárrí elli árið 1876. Séra Helgi Hálfðanarson nefndi hann spekinginn með barnshjartað í útfararræðunni (P[áll Melsteð] og Björn Jónsson], 1883). Björn þótti sérkennilegur í háttum en einstaklega ljúfur í lund, og nemendum hans þótti vænt um hann. Þegar Lærði skólinn í Reykjavík var nánast stjórnlaus í uppreisn nemenda, sem nefnd hefur verið *pereat*, þakkaði Björn nemendum auðmjúklega fyrir að koma í tíma til sín.

Björn kundi margvísleg reikningsdæmi; gamla húsganga og snjöll dæmi sem hann samdi sjálfur. En hugur hans snerist ekki um dæmin heldur um stærðfræðina og „veltingarbrögð“ hennar. Stærðfræðin tók stórstígum framförum á níttjándu öld en Björn náði ekki að fylgjast með þeim. Ef til vill hefur hann þegar haft mótaðar skoðanir er hann fluttist heim, þrjátíu og fjögurra ára gamall. Hann hélt áfram að glíma við hugmyndir átjándu aldar manna um tölur og talnahugtakið. Þegar grannt er skoðað rak þar sig hvað á annars horn og Björn var að glíma við að leysa þá árekstra, til dæmis núllsins. Auðvelt er að sjá það á tuttugustu og fyrstu öld þegar talnahugtakið er komið á fastan grundvöll en þá skyldi þess minnst að iðkun stærðfræði felst ekki í að kunna allar skilgreiningarnar og lausnirnar heldur í glímunni við að leita lausna.

Líklegt má telja að áhrif *Tölvísi* hafi ekki verið mikil. Fáir voru læsir á slíkt efni. Þeir sem það voru áttu aðgang að erlendum bókum sem voru ef til vill aðgengilegri í framsetningu og lausar undan heimsspekilegri glímu átjándu aldar. Dreift var um 700 eintökum af bókinni en sagt var að hún væri bókin sem allir hældu en enginn læsi. Hún var aldrei notuð sem kennslubók í Lærða skólanum í stað dönsku kennslubókanna. Björn var langt á undan íslenskum samtíðarmönnum sínum en hann náði ekki að fylgjast með þróun stærðfræðinnar úti í Evrópu.

Enginn nemenda Björns nam stærðfræði. Nokkrir þeirra settust í verkfræðiskólann í Kaupmannahöfn en luku ekki námi. Verkfræði var þá vaxandi atvinnugrein þótt fyrsti íslenski verkfræðingurinn, Sigurður Thoroddsen, væri ekki brautskráður fyrr en árið 1891. Tveir nemenda Björns sömdu kennslubækur í stærðfræði, Jón Guðmundsson (1841) og Eiríkur Briem (1869). Björn Jensson, dóttursonur Björns, stundaði nám við verkfræðiskólann og tók síðan upp merki afa síns sem kennari við Lærða skólann.

Eftir situr minning um einlægann unnanda stærðfræðinnar sem gat samsamað hana barnatru sinni, spekinginn með barnshjartað.

Heimildir

Allard, A. (ritstjóri). (1992). *Muhammad Ibn Mūsā al-Kwārizmī. Le Calcul Indien*. París: Societé des Études Classiques. Librairie scientifique et technique.

Árni Helgason. (1907–1915). Frásagnir um skólalíf á Íslandi um aldamót 18. og 19. aldar. 1. Skólahættir í Skálholti og í Reykjavíkurskóla hinum forna. Í *Safn til sögu Íslands og íslenskra bókmenta að fornu og nýju*. IV, bls. 74–98. Kaupmannahöfn og Reykjavík: Hið íslenska bókmenntafélag.

Bjarni Jónsson (ritstjóri). (1852). *Skýrsla um hinn lærða skóla í Reykjavík skólaárið 1851–52*. Viðauki. Reykjavík: Lærði skólinn í Reykjavík.

Björn Gunnlaugsson. (1865). *Tölvísi*. Reykjavík: Hið íslenska bókmenntafélag.

Einar H. Guðmundsson (2003). Björn Gunnlaugsson og náttúruspekin í Njólu. *Ritmennt*, 8, 9–78.

Eiríkur Briem. (1869). *Reikningsbók*. Reykjavík: Einar Þórðarson og höfundur.

Fundabók hins íslenska Bókmenntafélags í Reykjavík, 1816 til 1879. Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn.

Haraldur Sigurðsson. (1982). Ísland á landabréfum. Nokkrir drættir. Í *Kortasafn Háskóla Íslands ásamt ritgerð um Ísland á landabréfum*. Fylgir *Árbók Háskóla Íslands 1979–1980*. Bls. 7–15. Reykjavík: Háskóli Íslands.

Íslandskort Björns Gunnlaugssonar. Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn. Sótt af <http://islandskort.is/is/category/list/24>

Janus Jónsson. (1893). Saga Latínuskóla á Íslandi til 1846. *Tímarit Hins íslenska bókmenntafélags 14*, 1–97.

Jón Guðmundsson. (1841). *Reikningslist, einkum handa leikmönnum*. Viðey: O. M. Stephensen.

Jón Jónsson (ritstjóri). (1841). *Skýrsla um Bessastaða-Skóla fyrir skóla-árið 1840–1841*. Prentað sem viðauki við *Boðsrít*. Viðey: Bessastaðaskóli.

Jón Jónsson (ritstjóri). (1842). *Skýrsla um Bessastaða-Skóla fyrir skóla-árið 1841–1842*. Prentað sem viðauki við *Boðsrít*. Viðey: Bessastaðaskóli.

Kästner, A. G. (1792). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*. Göttingen: Vandenhof und Ruprecht. (Upphafleg útgáfa 1758).

Kristín Bjarnadóttir. (2006). *Mathematical education in Iceland in historical context – Socio-economic demands and influences*. Reykjavík: Háskólaútgáfan.

Lbs. 609 fol., bl. 1r–15r. Einkaskjöl og skilríki Björns Gunnlaugssonar. Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn.

Lbs. 2397, 4to. *Tölvísi* I [prentað] og II [handrit]. Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn.

Lbs. 2590, 4to. Bréf til Jóns Sigurðssonar. Landsbókasafn Íslands – Háskólabókasafn.

Lovsamling for Island 5. 1784–1791 (1855), 244. Reskript til Stiftsbefalingsmand Levetzow og Biskopperne Hannes Finnsson og Arni Thorarensen, ang. Indførelse i Skolerne af Stephensens Lærebog i Regning. Christiansborg 10. Februar 1786. Kaupmannahöfn.

Ottó J. Björnsson. (1990). *Brot úr ævi og starfi Björns Gunnlaugssonar riddara og yfirkennara. 1. Í föðurrúsum 1788–1817*. Reykjavík: Raunvísindastofnun Háskóla Íslands, reiknifræðistofa.

Ottó J. Björnsson. (1997). *Varð Gauss á vegi Björns Gunnlaugssonar? Erindi flutt í Íslenzka stærðfræðafélaginu í desember 1996*. Reykjavík: Raunvísindastofnun Háskólans, reiknifræðistofa.

Ólafur Stefánsson. (1785). *Stutt Undirvisun í Reikningslistinni og Algebra. Samantekin og útgæfin handa Skóla-lærisveinum og ødrum ynglingum á Íslandi*. Kaupmannahöfn: Höfundur. Sótt af <http://baekur.is/is/bok/000302457/>

Páll Melsteð. (1912). *Endurminningar*. Kaupmannahöfn: Hið íslenska fræðafélag.

P[áll Melsteð] og B[jörn Jónsson]. (1883). Björn Gunnlaugsson. *Andvari, tímarit hins íslenska þjóðvinafélags*, 9(1), 3–16.

Reynir Axelsson. (1993). Ræða eftir Björn Gunnlaugsson. *Fréttabréf íslenska stærðfræðafélagsins*, 5(1), 52–53.

Schubring, G. (2001). Argand and the early work on graphical representation: New sources and interpretation. Í J. Lützen (ritstj.), *Around Caspar Wessel and the geometric representation of complex numbers. Proceedings of the Caspar Wessel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11–15, 1998*, (bls. 125–146). Kaupmannahöfn: Reitzels forlag.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition*. New York: Springer.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmetique*. Leiden. Í D. J. Struik (ritstjóri) (1958). *The principal works of Simon Stevin. Volume II B, Mathematics*. Amsterdam: Swets og Zeitlinger.

Tropfke, J. (1980). *Geschichte der Elementarmathematik. Band I, Arithmetik und Algebra*. (4. útgáfa, Vollständig neu bearbeitet bei K. Vogel, K. Reich, H. Gericke). Berlin: Walter de Gruyter.

Þ. Í. Bps. C. VII, 3a. Biskupsskjalasafn. Bréf til biskups eða stiftsyrivalda um Bessastaðaskóla 1820–1826. Þjóðskjalasafn Íslands.

Þ. Í. Skólalastjórnarráð SK/4, örk 23. Þjóðskjalasafn Íslands.



Kristín Bjarnadóttir. (2012). Björn Gunnlaugsson og Tölvísi: Stærðfræði og einlæg trú í menntun 19. aldar. *Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun*. Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Sótt af <http://netla.hi.is/greinar/2012/ryn/017.pdf>