

Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun
Sérrit 2016 – Menntun, mannvit og margbreytileiki.
Greinar frá Menntakviku
Menntavísindasvið Háskóli Íslands



Ritrynd grein birt 31. desember 2016

►► Yfirlit greina

Kristín Bjarnadóttir

Landspróf miðskóla 1946–1976

Áhrif nýju stærðfræðinnar

► Um höfund ► Efnisorð

Landspróf miðskóla sem inntökupróf í menntaskóla og kennaraskóla og síðar fleiri skóla var haldið á árunum 1946–1976. Prófað var í átta námsgreinum þar sem íslenska vó tvöfalt. Landsprófið var upphaflega grundvallað á reglugerð nr. 3/1937 um námsefni til prófs upp úr öðrum bekk Menntaskólans í Reykjavík. Landsprófið í stærðfræði hélst að miklu leyti óbreytt á árunum 1947–1965. Prófað var í lesnum dæmum sem nemendur höfðu lært áður og í ólesnum dæmum. Frá árinu 1966 breyttist prófgerðin: lesin dæmi voru felld niður, prófið var stytta og tekið var að prófa úr svokallaðri nýrri stærðfræði. Þar var lögð aukin áhersla á tölur og eiginleika þeirra en einnig á mengi ásamt tilheyrandi rithætti og aðgerðum samkvæmt *Drögum að námsskrá* í landsprófsdeildum miðskóla frá árinu 1968. Markmiðið með innleiðingu nýju stærðfræðinnar var að auka skilning nemenda í stærðfræði.

Fjögur landsprófsverkefni í stærðfræði frá árunum 1953, 1966, 1971 og 1975 voru greind með tilliti til inntaks og færnikrafna samkvæmt greiningarlykli TIMSS. Greiningin sýnir að inntak prófverkefnanna breyttist í samræmi við *Drög að námsskrá* en um leið stytta dæmin, orðadæmum fækkaði og jafnframt fjölgaði innbyrðis óskyldum prófatriðum. Færnikröfur færðust frá lausnaleit yfir í aukna beitingu rútinuáðferða en dæmum með flóknum samsettum aðferðum fækkaði.

Gögn sýna að meðaleinkunn í stærðfræði, sem áður hafði verið lægri en meðaleinkunn allra átta námsgreina á landsprófi, færðist nær heildarmeðaleinkunn og nemendum gekk hlutfallslega betur en áður. Vonir höfðu staðið til þess að innleiðing mengjafræði yki skýrleik og skilning. Vart var þó hægt að búast við því. Nemendur þurftu á sama tíma að kynnast venjulegri algebru sem mörgum hefur reynst torskilin og námsefnið studdi samhengið milli mengjafræði og algebru aðeins að litlu leyti. Eftir sitja spurningar um hvort glíma við sundurlaus atriði stuðli fremur að vélrænum skilningi en lengri samsett dæmi, og hvort lesin dæmi eigi rétt á sér.

Selective entrance examinations into grammar schools in Iceland 1946–1976: New Math influences

► About the author ► Key words

The goal of new education legislation in Iceland in 1946 was to create a uniform education system, with eight-year compulsory education and equal access to college preparatory education. Previously, the two schools, which may be considered parallel to British grammar schools, had selected their students under strict admission control and their own entrance examinations. As a compromise, regulations for the Reykjavík Grammar School, dating from 1937, were chosen as a basis for a national

entrance examination in eight school subjects, to be run in all larger towns and rural boarding schools. The examination was intended to ensure a certain and standardized minimum knowledge in a number of subjects; the selection of the fittest with respect to certain attributes considered necessary for studies in a grammar school and a university or other establishments of higher education; and to offer all students and their relatives a certain assurance of an assessment of the examination papers by impartial persons.

In the national examination's first year it became clear that examining in Euclidian geometry did not work as teachers at lower levels had no such training. The mathematics examination was divided into two parts with equal weight, seen problems and unseen problems, tested two days in a row. The content of the unseen examination became typically 6–8 problems; 4–6 story problems on area, volume and proportions, some to be solved by setting up equations; and two rather complicated fractions with algebraic denominators. The story problems either described situations in contemporary daily life, or were versions of old problems.

By the mid-1960s, the examination, originally intended to provide equal opportunities to education, became considered as a hindrance on young people's path to preparation for life. Initially, a constant rate of 20% of the cohort attempted the examination and 13-14% reached grammar school admission. By 1969 the rate had risen to 34% vs. 21%. The seen problems were dropped, the examination was shortened considerably and the number of problems rose to 50 small and often unrelated items to ease grading but also to help the less able students to show basic competences.

In the midst of this demand for education for all, New Math was implemented for the purpose of facilitating understanding. The paper contains an analysis and comparison of typical examination papers before and after the implementation of New Math. The analysis was made according to *TIMSS Monograph no. 1: Curriculum framework for mathematics and science* by Robitaille et al. (1993).

The results of an analysis of examination papers from 1953, 1966, 1971 and 1975 indicate that the content swayed towards using set-theoretical notation and number notation to various number bases and back again. The proportion of simplifying algebraic expressions and solving equations stayed around 50% with a slight increase, while new topics were introduced to statistics and probability. Performance expectations became less oriented towards independent development of notation, vocabulary, and algorithms. The expectations developed away from using complex procedures towards routine procedures, and investigating and problem solving was reduced. In general, the examination developed into a host of incoherent details of diffused focus. However, data show that the average mathematics grade, which had been about 0.5 lower on the 0–10 scale than the average grade in all eight subjects during the 1950s and 1960s, had reached other subjects in 1972 during this process of increased number of simpler problems.

Some questions remain as to what kinds of syllabi and examinations enhance mathematical thinking and understanding. Richard Skemp (1978) expressed concerns that the backwash effect of examinations and overburdened syllabi promoted superficial instrumental understanding at the cost of deeper relational understanding. George Polya (1973) suggested that students think of a familiar problem in devising a plan for solving problems. Could the seen problems enhance understanding on that ground? Could multi-step word problems provide opportunities for teachers, together with their students, to delve into mathematical processes and thus create lattices of acts of understanding, as proposed by Anna Sierpinska (1994)?

Inngangur

Landspróf miðskóla var sett á laggirnar árið 1946. Tilgangurinn var að tryggja jafnrétti til náms. Þegar komið var fram á sjöunda áratug 20. aldar var tekið að líta á landsprófið sem tæki til að hindra ungmenni á námsbraut þeirra. Í miðri umræðu um aðgengi til náms fyrir alla var hin svokallaða nýja stærðfræði innleidd í þeim tilgangi að glæða skilning á stærðfræði. Í greininni eru valin landsprófsverkefni í stærðfræði fyrir og eftir innleiðingu nýju stærðfræðinnar á árunum 1966–1968 greind og borin saman.

Spurningar sem vakna varða menntapólitískar væntingar sem lesa má úr prófverkefnunum: Hvaða inntak (e. content) og færni (e. performance) taldist vera heppilegur undirbúningur undir æðra nám; hvaða breytingar urðu við innleiðingu nýju stærðfræðinnar og urðu þær til að stuðla að bættum skilningi á stærðfræði?

Bakgrunnur

Landspróf miðskóla: inntökupróf í menntaskóla og kennaraskóla

Meðal fyrstu verka stjórnvalda eftir að lýðveldi var stofnað árið 1944 var að umbreyta skólakerfinu með nýjum fræðslulögum árið 1946. Í stað þess að taka inntökupróf inn í sex ára menntaskóla við 13–14 ára aldur áttu nemendur að geta lokið því sem samsvaraði fyrstu tveimur námsárum menntaskóla í heimabyggð og gengist þar undir próf sem nefndist landspróf miðskóla. Þáverandi menntamálaráðherra, Brynjólfur Bjarnason, lýsti fyrirætlunum yfirvalda í hátiðarræðu 1. desember 1944 á þessa leið:

Meginverkefnin eru þessi: ... að breyta því [Íslandi] úr hálfildings hráefnanýlendu, eins og það er nú, í iðnaðarland með nýtzku tækni ... við [þurfum] á kunnáttumönnum og vísindamönnum að halda ... Undirstaðan undir sérmenntuninni og hinni vísindalegu menntun er hin almenna fræðsla ... Svo sem öllum ... má vera kunnugt hefur gífurleg togstreita staðið um það hvaða börn og ungmenni ættu að hafa aðgang að menntaskólunum og þar með háskólamenntun ... Í hópi hinna 25 [sem hæsta einkunn hafa hlotið á inntökuprófi í Menntaskólann í Reykjavík] eru jafnan unglingar sem komnir eru í gegnum hreinsunareldinn ... eftir aukakennslu, námsskeið, einkatíma og stúderingu í því hvernig eigi að taka próf ... [þeir] sem mesta ítrosu hafa hlotið, hafa að lokum mestar líkur til þess að komast inn fyrir skólans dyr ... margur gáfaður unglingur hefur útilokast frá framhaldsnámi, sökum aðstöðumunar, sem einkum hefur skapað af tvennu: fjárskorti og fjarlægð frá skólum ... Upp af athugunum á þessu hafa sprottið þær skólamálatillögur, sem nú eru fram komnar (Gunnar M. Magnúss, 1946, bls. 8–12).

Af ræðu menntamálaráðherra má ráða að ætlun yfirvalda hafi verið að jafna aðstöðumun nemenda og færa vald menntaskólanna til að velja nemendur sína til yfirvalda menntamála. Fyrsta landspróf miðskóla var haldið vorið 1946 og hefur undirbúningur nemenda undir prófið þá hafist haustið 1945, allnokkru fyrir samþykkt fræðslulaganna vorið 1946. Það var þó ekki fyrr en 22. janúar 1946 að reglur um prófið voru birtar. Þar sagði í 3. grein:

Þangað til ný lög um skólakerfi, gagnfræðanám og menntaskóla koma til framkvæmda, skulu námskröfur til miðskólaprófs samsvara sem mest námskröfum til gagnfræðaprófs við Menntaskólann í Reykjavík, sbr. reglugerð dags. 8. febr. 1937, samkvæmt nánari fyrirmælum fræðslumálastjórnar. (Bráðabirgðareglur um miðskólapróf í bóknámsdeild nr. 24/1946).

Samkvæmt Reglugerð fyrir Menntaskólann í Reykjavík (nr. 3/1937) var gagnfræðapróf tekið upp úr 2. bekk skólans og það var því námsefni hans sem landspróf miðskóla skyldi byggjast á. Lög um menntaskóla (nr. 58/1946) kváðu síðan á um að menntaskólar væru tveir, annar í Reykjavík, hinn á Akureyri, og þar væru fjórir ársbekkir. Fyrirmæli þessi skýra hvers vegna fyrsti ársbekkur menntaskólanna tveggja hefur verið nefndur þriðji bekkur.

Reglugerð um miðskólapróf í bóknámsdeild (nr. 51/1947) var gefin út 14. apríl 1947. Þar sagði í 3. grein að um prófkröfur færi eftir gildandi lögum og fyrirmælum á hverjum tíma. Samkvæmt

4. grein reglugerðarinnar skyldu vera í prófanefndinni sérfróðir menn í þeim greinum sem landsprófið tæki til og vel kunnugir kennslu og námsefni sem krafist væri til prófsins. Í 6. grein segir að til inngöngu í menntaskóla eða kennaraskóla þurfi meðaleinkunnina 6 í landsprófsgreinum og 5 í öðrum greinum. Ekkert sagði að öðru leyti um markmið prófsins eða námskröfur.

Drög að námsskrám fyrir barna- og gagnfræðaskóla (1948) voru gefin út í framhaldi af útgáfu fræðslulaganna vorið 1946. Tekið var fram í kaflanum um gagnfræðaskóla að drögin væru engan veginn fullkomin námskrá heldur aðeins drög sem væru send kennurum og skólastjórum til leiðbeiningar. Þar er ekki minnst á landspróf miðskóla. Námskrá fyrir nemendur á fræðsluskyldualdri (Menntamálaráðuneytið, 1960) tók einungis til skyldunámsins sem var átta ár frá sjö ára aldri. Námskráin tók því ekki til landsprófs miðskóla og þess er ekki getið í námskránni.

Af framangreindu er ljóst að ekki var lýst yfir markmiðum með prófinu og engin viðmið voru sett um námskröfur aðrar en komu fram í Reglugerð fyrir Menntaskólann í Reykjavík (nr. 3/1937) fyrr en árið 1968 er *Drög að námsskrá í landsprófsdeildum miðskóla* voru gefin út af hálfu landsprófsnefndar. Árið 1961, löngu eftir að landsprófi miðskóla var komið á laggirnar, voru markmið þess greind þau að það skyldi tryggja ákveðna og samræmda lágmarksþekkingu, tryggja eftir mætti úrval hinna hæfustu og veita tryggingu fyrir mati óvilhallra manna (Jónas Pálsson og Hjálmar Ólafsson, 1961).

Frá og með árinu 1966 tók skólum og skóladeildum á framhaldsskólastigi að fjölga mjög. Landspróf miðskóla var áfram inntökuskilyrði í menntaskólana um skeið en það rann saman við samræmt gagnfræðapróf árið 1973. Grunnskólalög voru sett árið 1974 og fyrsti fjölbrautaskólinn var stofnaður árið 1975. Þá tóku við önnur inntökuskilyrði sem ekki verða rædd hér.

Landspróf í stærðfræði fyrir tíma nýju stærðfræðinnar

Fyrstu 20 árin skiptist landspróf í stærðfræði í tvo hluta sem vógu jafnt til einkunnar, lesin dæmi og ólesin. Fyrst var prófað í lesnum dæmum og daginn eftir í ólesnum dæmum. Síðar skiptist ólesna prófið líka í tvo hluta sem voru prófaðir fyrir og eftir hádegi sama dag. Ólesna prófið var venjulega 6–8 dæmi; 4–6 orðadæmi um flatarmál, rúmmál og hlutföll, sum ætluð til að setja upp jöfnur; og tvö samsett og fremur flókin brotadæmi með algebrustæðum í nefnara. Orðadæmin lýstu annaðhvort aðstæðum úr daglegu lífi eða voru gömul dæmi í nýjum búningi, jafnvel dæmi úr *Liber Abaci* frá 1202 eftir Leonardo frá Pisa (Sigler, 2003, bls. 276), sem oft er kallaður Fibonacci. Á fyrsta ári landsprófsins, árið 1946, var prófað úr evklíðskri rúmfræði um allt land eins og gert var á prófi upp úr 2. bekk Menntaskólans í Reykjavík skv. reglugerð (nr. 3/1937). Þá þegar þótti sýnt að það gengi ekki, aðeins menntaskólarnir í Reykjavík og á Akureyri gátu undirbúið nemendur sína undir það. Efnið var fellt út úr prófinu og færð upp í þriðja bekk menntaskólanna sem þá var orðinn fyrsti bekkur í raun. Ekki hefur fundist heimild um þessa breytingu önnur en athugasemd í kafla um Menntaskólann í Reykjavík 1946–1969 í sögu skólans (Einar Magnússon, 1975). Heimild er ekki að finna í reglugerðum eða drögum að námskrá.

Nýja stærðfræðin og landsprófið

Hin svokallaða nýja stærðfræði átti sér rætur í nokkrum löndum á árunum eftir aðra heimsstyrjöld. Hún varð að alþjóðlegri hreyfingu eftir fund stærðfræðinga, stærðfræðikennara og fulltrúa yfirvalda menntamála í löndum OEEC sem haldinn var í nóvember 1959 í Royaumont í Frakklandi. Meðal umræðuefna var að stærðfræði sem fræðigrein hefði fleygt fram og stórt bil myndast milli stærðfræðikennslu í menntaskólum og háskólum. Brýnasta viðfangsefnið væri að breyta kennslu þeirra sem stefndu á háskólanám í stærðfræði en einnig var talið að breytingar neðar í skólakerfinu væru æskilegar. Rætt var um nauðsyn þess að setja stærðfræði fram með mengjafræðilegum hætti en einnig um nýja framsetningu rúmfræði sem tengja skyldi algebru og flytja inn í hnitakerfi. Þá væri vert að taka upp í námsefnið hagnýta efnisþætti, svo sem tölfræði og líkindareikning (OEEC, 1961).

Hreyfing þessi barst til Íslands og námsefni var breytt í þessa veru í stærðfræðideild Menntaskólans í Reykjavík haustið 1964. Frá þessu er greint í inngangi að umfjöllun um stærðfræði í Drögum að námsskrá í landsprófsdeildum miðskóla (Landsprófsnefnd, 1968, bls. 56–59), þar

sem innleiðing nýju stærðfræðinnar er kynnt. Þar sagði að markmiðið væri að grundvalla skóla-stærðfræðina á frumhugtökum mengjafræðinnar, sem í senn væru einföld og almenns eðlis, og að leggja meiri áherslu á inntak og eðli talna og talnareiknings en tíðkast hefði. Ljóst hefði verið að breytingarnar sem hafnar voru í menntaskólunum í samræmi við þessa nýju stefnu árið 1964 gætu ekki til fulls skilað tilætluðum árangri nema breytt yrði um stefnu í stærðfræðikennslu í landsprófsbekkjum, þar sem grundvöllur væri lagður að algebru, einni veigamestu undirstöðugrein menntaskólastærðfræðinnar. Miklu varðaði að nemendur öðluðust skýrar hugmyndir um frumhugtök mengjafræðinnar og vensl þeirra, og næðu góðu valdi á táknmálinu. Frumhugtök þessi kæmu fram í grundvelli hvernar stærðfræðigreinar, og því yrði oft að vísa til þeirra og beita þeim. Táknmálið gæfi kost á að tjá hugmyndir og hugmyndatengsl með nákvæmum og augljósum hætti. Í ábendingum til kennara segir: „Æskilegt er, að ekki sé byrjað á algebru, sem miðast við talnamengi (þ.e. hinni venjulegu algebru), fyrr en nemendur hafa náð góðum tókum á venzlum mengja og þeim vísi að mengjaalgebru, sem finnst ... í kennslubókinni.“ (Landsprófsnefnd, 1968, bls. 59). – Af greinargerð þessari má ráða að markmið breytinganna hafi fyrst og fremst verið það að búa nemendur, sem gengust undir landspróf, undir frekara nám í stærðfræði í menntaskólum.

Stærðfræðihluti landsprófsins hafði verið með svipuðum hætti á hverju ári fram til ársins 1966, þegar hinni nýju stærðfræði var hrundið af stað á barna- og gagnfræðaskólastigum á Íslandi. Haustið 1966 hófst tilraunakennsla í nýju stærðfræðinni í landsprófsdeildum í nokkrum skólum á grundvelli nýútgefnar kennslubókar eftir Guðmund Arnlaugsson (1966), *Tölur og mengi*, og var tilrauninni fram haldið veturinn 1967–1968. *Tölur og mengi* var þá eina kennslubókin sem uppfyllti framangreindar kröfur (Kristín Bjarnadóttir, 2015). Guðmundur sagði í formála bókarinnar að áhersla á færni og vélræn vinnubrögð hefði þokað fyrir kröfum um aukinn skilning. Þessi þróun hefði ýtt nokkrum grundvallarhugtökum úr rökfræði, mengjafræði og algebru niður á barnaskólastig. Reynsla víðs vegar að benti til þess að börn – og það jafnvel á unga aldri – ættu tiltölulega auðvelt með að tileinka sér þessi hugtök, sem áður voru ekki kynnt fyr en á háskólastigi, og hefðu gaman af þeim. Enn fremur virtust þau stuðla að auknum skýrleik og nákvæmni í hugsun og reikningi.

Kennslubókin *Tölur og mengi* var notuð til undirbúnings landsprófi á árunum 1967–1975 ásamt *Kennslubók í algebru* eftir Ólaf Danielsson (1951) sem var fyrst gefin út 1927. Mengjafræði varð þó að kenna um sinn ótengda við aðra efnisþætti stærðfræðinnar, gagnstætt því sem tekið var fram í *Drögum að námsskrá*. Grunnatriði algebru varð að kenna á hinu stutta skólaári til að undirbúa nemendur undir landsprófið.

Vandi landsprófsins og gagnrýni á það

Fram að 1960 spreytti 20% hlutfall hvers árgangs sig að jafnaði á landsprófinu og 13–14% náðu lágmarkseinkunn til inngöngu í menntaskóla og kennaraskóla. Árið 1969 höfðu hlutföllin vaxið í 34% og 21% (Kristín Bjarnadóttir, 2006/2007, bls. 421). Frá og með árinu 1966 var próftíminn stytur, og í stað lesnu dæmanna komu stutt dæmi sem prófuðu flest aðeins eitt atriði hvert. Fjöldi dæma óx upp í 50 og síðar 100 lítil og oft óskyld atriði. Ætla má að tilgangurinn hafi bæði verið að einfalda fyrirgjöf og gefa jafnframt slakari nemendum tækifæri til að sýna lágmarkskunnáttu.

Uppúr 1965 tók að bera á gagnrýni málsmetandi manna á landsprófið. Halldór Elíasson (1966), þá ungur stærðfræðingur en síðar prófessor, ritaði grein í tímaritið *Menntamál* árið 1966. Þar gagnrýndi hann harðlega stærðfræðikennslu eins og hún birtist í kennslubókum og landsprófsverkefnum. Hann sagði að nokkuð mikið væri um slæmar reikningslistir í námsefninu. Hlutfallareikningurinn væri bein móðgun við heilbrigða skynsemi í því formi sem hann væri kenndur. Notkun þríliðunnar tryggði að nemendur hefðu ekki hugmynd um hvað þeir væru að gera og hefðu enga aðstöðu til að dæma um hvort raunverulega væri rétt að nota þríliðu. Þá væri algjörlega einskis virði að nemendur lærðu lesin dæmi utan að. Lakari nemendur freistuðust einmitt til þess, en ættu að verja tíma sínum á skynsamlegri hátt. Slík próf væru einnig óæskileg þar sem þau hefðu mjög neikvæð áhrif á kennsluaðferðir og væri landsprófskennslan áttanlegt dæmi þess.

Matthías Jónasson (1968), prófessor í uppeldisfræði, ritaði grein í Lesbók Morgunblaðsins þar sem hann sagði að inngönguprófi að æðra námi hefði löngum verið ætlað eins konar síu- eða úrvinsunarhlutverk. Sú framkvæmd væri ekki sársaukalaus og myndi seint reynast óskeikul. Samt ætti hún sér nokkra réttlætingu. Hjá þjóðum, sem héldu æðri menntastofnunum í sífelldri fjárhags-

kreppu, virtist sú viðleitni ekki óskynsamleg að beina helst þeim unglingum inn í æðri skóla sem virtust hæfastir til að notfæra sér menntunarskilyrðin sem þar byðust. Undirbúningi undir landsprófið þyrfti því að ætla meiri tíma, minnst tvö ár. Kennarar þyrftu meiri tíma til að kynna hækni og ástundunarsemi nemenda sinna. Námið yrði líka að skipuleggja betur. Eins árs undirbúnings-tími leiddi til of mikillar pressu sem unglingar á mótunarárum ættu erfitt með að takast á við. Matthíasi blöskraði sú mergð samhengislausra smáatriða sem nemendum væri ætlað að muna. Hann spurði: „Ætli svörin við slíkum spurningum séu öruggur mælikvarði á hækni unglunga til æðra náms? Hvað um hugkvæmni, dómgreind, rökvísi og skapandi gáfur?“ Gagnrýni Matthíasar átti ekki sérstaklega við stærðfræði heldur landsprófið í heild.

Árangur á landsprófinu í stærðfræði

Inntökuskilyrði í menntaskóla voru ströng. Nemendur urðu að ná að meðaltali 60% árangri á prófum í átta námsgreinum, þar sem móðurmálið vó tvöfalt. Tímabilið 1952–1955 annars vegar og tímabilið 1962–1966 hins vegar var meðaleinkunn í stærðfræði alltaf lægri en meðaleinkunn allra átta greinanna. Landsmeðaleinkunn er ekki tiltæk frá þessum árabílum en athugun á 5–8 skólum bendir til þess að munað hafi um 0,5 á þessum einkunnum, misjafnt eftir árum. Það að fella niður lesin dæmi árið 1966 og taka upp smærri dæmi í staðinn breytti engu í þessu tilliti. Gögn úr einum stórum skóla frá árunum 1958–1962 benda til þess að meðaleinkunn úr lesnum dæmum hafi verið um 1,2 hærri en í ólesnum dæmum (Kristín Bjarnadóttir, 2006, bls. 200–205, 286–289; MMRN 2016 DB/1(1), DB/1(2), DB/2(1), DB/3(1), DB/5(1), DB/6(1)).

Landsmeðaleinkunn er tiltæk frá árunum 1968–1973 (Þ.Í. 1986, BA/63). Munurinn á heildar-meðaleinkunn og meðaleinkunn í stærðfræði minnkaði lítillega frá og með 1970, og árið 1972 var meðaleinkunn á öllu landinu í stærðfræði um 0,2 hærri en meðaleinkunn í öllum greinum. Ekki er þó ólíklegt að dreifing einkunna í stærðfræði hafi verið meiri en í öðrum námsgreinum. Það getur hafa haft áhrif á stöðu hóps nemenda. Ekki var krafist lágmarkseinkunnar í neinni námsgrein, aðeins meðaltalið gildi.

Framkvæmd prófsins

Steinþór Guðmundsson stærðfræðikennari samdi prófverkefni í stærðfræði á árunum 1946–1962 en Björn Bjarnason, síðar rektor við Menntaskólana við Tjörnina og við Sund, tók við árið 1963. Björn fór sér hægt með breytingar á prófinu fyrstu árin og ráðgaðist við starfandi formenn landsprófsnefndar á tímabilinu og samnefndarmenn sína um breytingar sem hann hóf með prófinu árið 1967 (Andri Ísaksson, munnleg heimild, 10. mars 2003). Andri, sem var sérstakur ráðgjafi í skólamálu frá 1. febrúar 1966 og síðar formaður landsprófsnefndar 1967–1969, sagði að hann hefði stutt breytingarnar af því að hann hefði talið gott að losa um gömul bönd og námsbækur sem ríkt höfðu næstu tvo til þrjú áratugi á undan.

Próftíminn, sem upphaflega dreifðist á tvo daga og varð mest 7 ½ klst. vorið 1965 og árin þar á undan, styttest í 3 klst. vorið 1969 og síðar í 2 ½ klst. Landsprófsverkefni voru opinber gögn og gefin út á prenti (Bjarni Vilhjálmsson 1952; 1959; 1963). Síðari próf voru fjölfölduð í skólunum og eru varðveitt í einkaeign og á Þjóðskjalasafni (Þ.Í., 1986, BA/62-BA/67).

Tímabili landsprófsins, 1946–1976, má skipta í smærri tímabil sem hafa mismunandi einkenni með tilliti til prófsins í stærðfræði. Þau eru rakin hér á eftir.

Tímabilið 1946–1950

- Líta má á þetta sem tilraunatímabil. Á fyrsta landsprófinu 1946 voru sex dæmi (Bjarni Vilhjálmsson, 1952):
- Kaupmenn kaupa og selja appelsínur. Spurningar prófa úr öllum gerðum prósentureiknings.
- Einfalda á algebrubrot með öllum reikniaðgerðum, m.a. þar sem þátta þurfti $a^3 + b^3$ og $a^3 - b^3$.

- Finna á rúmmál sívalningslaga geymis og tímunn til að fylla hann.
- Gefnar eru upplýsingar um þrjár stærðir til að setja upp þrjár jöfnur með þremur óþekktum stærðum.
- Teikna skal innritanlegan ferhyrning ABCD ef gefnar eru hliðarnar AB og AD, hornalínan AC og hornið A.
- A er gleitt horn. Á öðrum armi þess liggur punkturinn B á milli punktanna A og D, og á hinum arminum liggur punkturinn C á milli punktanna A og E. Sanna skal að $DE > DC > BC$.

Árangur á prófinu var viðunandi í menntaskólunum tveimur, Menntaskólanum í Reykjavík og Menntaskólanum á Akureyri, en slakari í héraðs- og gagnfræðaskólum úti um land. Spurningar úr evklíðskri rúmfræði, eins og spurningar 5 og 6, hurfu alfarið úr prófverkefnum árið 1947. Þá var þeim skipt út fyrir dæmi sem hægt var að leysa með reikningi eingöngu og annarri flókinni algebrustæðu til að draga saman og einfalda. Evklíðsk rúmfræði hafði aðeins verið kennd í menntaskólunum frá 1919 og ekki höfðu allir stærðfræðikennarar í gagnfræðaskólum kynnst henni.

Tímabilið 1951–1965

Prófið var komið í fastar skorður á þessu tímabili. Því var fram haldið til 1960 með svipuðu lagi. Prófað var með 6–8 ólesnum dæmum auk lesnu dæmanna. Þar af voru tvö til þrjú samsett algebrudæmi, oftast eitt þeirra jafna; eitt eða tvö hrein reikningsdæmi; eitt eða tvö orðadæmi til að leysa með því að setja upp jöfnu; og samsett rúmmálsdæmi um píramída, sívalninga, keilur eða kúlur þar sem gjarnan þurfti að beita Pýþagórasarreglu.

Frá og með 1961 voru ólesnu dæmin 10 alls, og frá 1962 var þeim skipt á tvo próftíma, fyrir og eftir hádegi sama dag. Því var haldið þannig fram yfir 1965 en eftir það voru lesnu dæmin tekin út. Orðadæmi voru 60–71% af ólesnu dæmunum á tímabilinu 1957–1965 (Kristín Bjarnadóttir, 2006/2007, bls. 426–427). Námsefnið var *Reikningsbók* eftir Ólaf Daníelsson (1920) eða *Reikningsbók* IIA eftir Jón Á. Gissurarson og Steinþór Guðmundsson (1949–1950), og Algebra eftir Ólaf Daníelsson (1951). Tiltekið var hvaða blaðsíður og dæmi skyldi lesa.

Tímabilið 1966–1968

Á þessu tímabili átti sér stað eins konar yfirfærsla frá eldra fyrirkomulagi til innleiðingar nýju stærðfræðinnar og annarra nýrra strauma. Nýr landsprófsnefndarmaður hafði tekið við að semja prófverkefnið árið 1963, Björn Bjarnason. Hann hófst handa við breytingar er hann undirbjó prófið 1966. Þá voru lesnu dæmin felld niður og stutt dæmi, þar sem aðeins voru prófuð einstök atriði, komu í stað þeirra. Árin 1967 og 1968 voru tvenns konar prófverkefni, annað fyrir þá sem höfðu lesið hefðbundið námsefni, en hitt fyrir þá sem lesið höfðu *Tölur og mengi* eftir Guðmund Arnlaugsson (1966) og Algebra eftir Ólaf Daníelsson (1951). Efni nýju stærðfræðinnar var inngangur að talnafræði ásamt mengjafræðilegum hugtökum og aðgerðum.

Árið 1967 hafði hlutfall þeirra sem reyndu sig við landspróf náð 30%. Áður hafði einn prófdómari samið prófið og yfirfarið öll verkefni og séð til þess að einkunnagjöf væri samræmd en það var ekki lengur mögulegt. Hugsanlega hefur það ýtt undir þá ákvörðun að leggja fyrir mörg lítil dæmi þar sem svör voru annaðhvort rétt eða röng. Hlutfall orðadæma minnkaði líka, sérstaklega í nýju stærðfræðinni, var 55% árið 1967 en 45% árið 1968.

Tímabilið 1969–1972

Aðeins eitt námsefni var í boði fyrir alla á árunum 1969–1972, *Tölur og mengi* og algebra, annaðhvort eftir bók Ólafs Daníelssonar (1951) eða Más Ársælssonar (1969). Prófverkefnið var stytta þannig að prófað var í stærðfræði í einni setu. Hlutfall orðadæma féll niður í 30–40% og dæmin voru sett fram í 50 atriðum.

Tímabilið 1973–1976

Frá og með 1973 voru komnar fram kennslubækur þar sem allt námsefnið var sett fram á mengjafræðilegan hátt. Árin 1973 og 1974 stóð val á milli sama námsefnis og 1969–1972 og þýðingar á sænskum bókaflökki sem saminn var á vegum NKMM, *Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen*. Bókaflokkur Harðar Lárussonar (1973; 1974) kom fram sem þriðji valkostur árið 1975. Dæmin voru sett fram í 100 atriðum og hlutfall orðadæma var 20–34%.

Rannsókn á prófverkefnum

Rannsóknarspurningar

Markmið rannsóknarinnar er að kanna þróun landsprófs miðskóla í stærðfræði á þriggja áratuga tímabili með sérstöku tilliti til innleiðingar nýju stærðfræðinnar. Spurt er:

- Hvernig þróaðist inntak landsprófs miðskóla í stærðfræði?
- Hvernig þróuðust færnikröfur í landsprófi miðskóla í stærðfræði?
- Er unnt að álykta að innleiðing nýju stærðfræðinnar hafi leitt til aukins skilnings?

Áhugi á svörum við þessum spurningum er ekki einungis sögulegur. Þótt ekki séu lengur haldin samræmd inntökupróf á borð við landspróf miðskóla eru nemendur enn valdir inn í framhaldsskóla eftir ýmsum leiðum þar sem mat á fyrri árangri kemur gjarnan við sögu, ekki síst árangri í stærðfræði. Próf hafa löngum haft síunarhlutverk og því er vert að ígrunda inntak þeirra og færnikröfur. Árangursmat og hindranir á námsferli eru ekki eingöngu íslensk fyrirbrigði. Matthías Jónasson (1967) vitnaði í rannsóknir, sem gerðar voru á tímum landsprófs miðskóla, og sagði að fallkvóti nemenda, sem byggju sig undir menntaskóla eða væru þar hefði einnig verið hár meðal annarra þjóða. Hann nefndi Svíþjóð, Vestur-Þýskaland og England í því samhengi. Það bendir til þess að líta megi á próf sem þátt í menningarumhverfi þróaðra landa og þau séu forvitnileg sem slík.

Greining

Fjögur prófverkefni með ólesnum dæmum voru greind. Þau voru valin af handahófi hvert frá sínu tímabili nema tímabilinu er prófið var í mótun. Prófin voru valin sem dæmi um inntaks- og færnikröfur á tímabilinu. Fyrsta verkefnið er frá 1953, þegar verkefni með hefðbundnu efni voru komin í fastar skorður; annað frá 1966, rétt fyrir innleiðingu nýju stærðfræðinnar, þegar fjöldi nemenda hafði vaxið, nýr landsprófsnefndarmaður tekið við og lesin dæmi verið lögð niður; hið þriðja frá 1971, þegar prófun úr nýju stærðfræðinni eins og hún var kynnt í *Tölum og mengjum* var komin í fastar skorður; og hið fjórða er eitt þriggja verkefna frá 1975 á síðasta skeiðinu (Bjarni Vilhjálmsson, 1959, 1963; Þ.Í. 1986, BA/62-BA/67).

Tækið sem valið var til að greina landsprófsverkefnið var greiningarrámi fyrir TIMSS, The Third International Mathematics and Science Study (Robitaille o.fl., 1993, bls. 45–50, 61–66, 75–83). Greiningin var tvíþætt, greining á inntaki (e. content) og greining á færni (e. performance). Höfundar greiningarrámmans flokkuðu inntak námsefnis í stærðfræði í tíu flokka og síðan hvern þeirra í tvo til tíu undirflokka. Valdir voru í þessa rannsókn flokkar sem eiga við nám á gagnfræðastigi á tímum landsprófsins. Flokkur 9 er til dæmis stærðfræðigreining sem var ekki kennd þar. Flokkun á færnikröfum segja höfundar til komna fyrir áhrif menntastefnu bandarískra samtaka stærðfræðikennara, National Council of Teachers of Mathematics, og strauma í fleiri löndum í þá átt að veita mikilvægi færniþátta aukna athygli í kennslu.

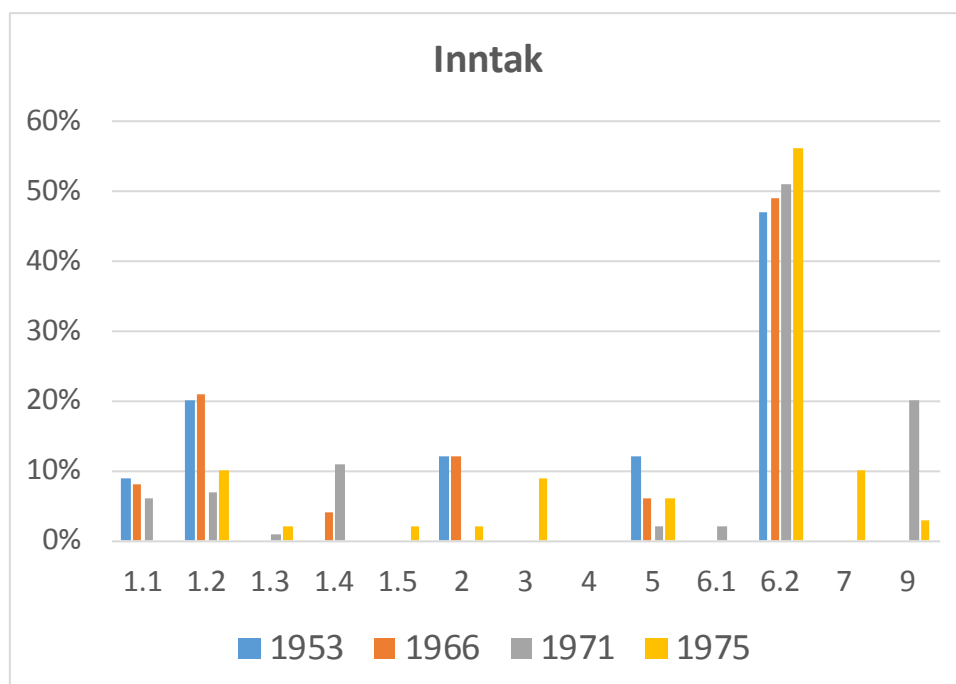
Höfundar segja flokkunina að vissu marki handahófskennda, að minnsta kosti í smærri atriðum. Þrátt fyrir það hentar hún allvel til að skoða inntak prófverkefnanna og þróun þeirra og þá færni sem krafist var. Erfitt reyndist samt að beita greiningunni í smáatriðum þar sem oft var verið að prófa mörg atriði í einu prófdæmi, sérstaklega á meðan um var að ræða fá stór dæmi, eins og árið 1953, en einnig að nokkru 1966.

Inntak

Inntakspættir landsprófsverkefna frá árunum 1953, 1966, 1971 og 2016 voru flokkaðir eins og sýnt er í *Töflu 1*. Til samanburðar er flokkun á inntakspáttum í samræmdu könnunarprófi í 10. bekk árið 2015 (Menntamálastofnun, 2015). Það próf er annars eðlis. Það er ekki inntökupróf, reiknivélar eru leyfðar og spurningarnar eru eingöngu fjölvalsspurningar með fjóra valkosti við hverri hinna 60 spurninga.

Tafla 1 – Hlutfall inntakspáttar prófverkefna í stærðfræði						
		1953	1966	1971	1975	2015
1.1	Náttúrlegar tölur	9%	8%	6%		12%
1.2	Almenn brot og tugabrot	20%	21%	7%	10%	12%
1.3	Heilar tölur, ræðar tölur, rauntölur			1%	2%	2%
1.4	Aðrar tölur, talnahugtök		4%	11%		15%
1.5	Námundun og talnamat				2%	3%
2	Mælingar	12%	12%		2%	13%
3	Rúmfræði: Staða, lögun, hnitarúmfræði				9%	8%
4	Rúmfræði: samhverfa, kongrúens, einslögun					5%
5	Hlutföll	12%	6%	2%	6%	5%
6.1	Mynstur, vensl, föll			2%		5%
6.2	Jöfnur, formúlur	47%	49%	51%	56%	15%
7	Framsetning og greining gagna, óvissa, líkindi				4%	5%
9	Formgerð, mengi, mengjaritháttur			20%	3%	

Mynd 1 sýnir sömu hlutföll inntakspáttar á landsprófum 1953, 1966, 1971 og 1975.



Mynd 1 – Skipting inntakspáttar í fjórum landsprófsverkefnum í stærðfræði.

Megináhersla í verkefninu árið 1953 var á almenn brot og tugabrot, þar með taldar prósentur, mælingar, þ.e. flatarmál og sér í lagi rúmmál, og svo jöfnur og formúlur sem voru aðalviðfangsefni allra prófverkefnanna. Nokkurn veginn sama inntak var í prófverkefninu árið 1966.

Inntakið var orðið verulega breytt í verkefninu frá árinu 1971. Þar var áherslan á tölur og talnafræðileg atriði: náttúrlegar tölur, neikvæðar tölur og lotubundin brot, en minna um brot og enginn prósentureikningur eða mælingar. Reikningur í tvíundakerfi og sætiskerfum með öðrum grunn-

tölum en tíu (1,4), mengi og mengjaritháttur (9) urðu áberandi. Hlutur hlutfalla (5), gjarnan í formi þríliðu, var um 12% árið 1953, en dróst mjög saman, var aðeins 2% árið 1971 en 6% árið 1975.

Inntakið var einnig breytt árið 1975. Minni áhersla var lögð á náttúrulegar tölur og talnakerfi. Reikningur í sætiskerfum öðrum en tíu hvarf. Mælingar og prósentur komu aftur fram. Námundun kom inn. Haldið var áfram með talnamynstur og mengi, en nýir efnispættir voru framsetning og greining gagna, óvissa og líkindi, öðru nafni tölfræði og líkindareikningur. Evklíðsk rúmfræði (4) kom ekki við sögu allt tímabilið eins og áður er greint frá. Hins vegar var tekið að nota hnitakerfi til að setja fram jöfnur og ójöfnur (3).

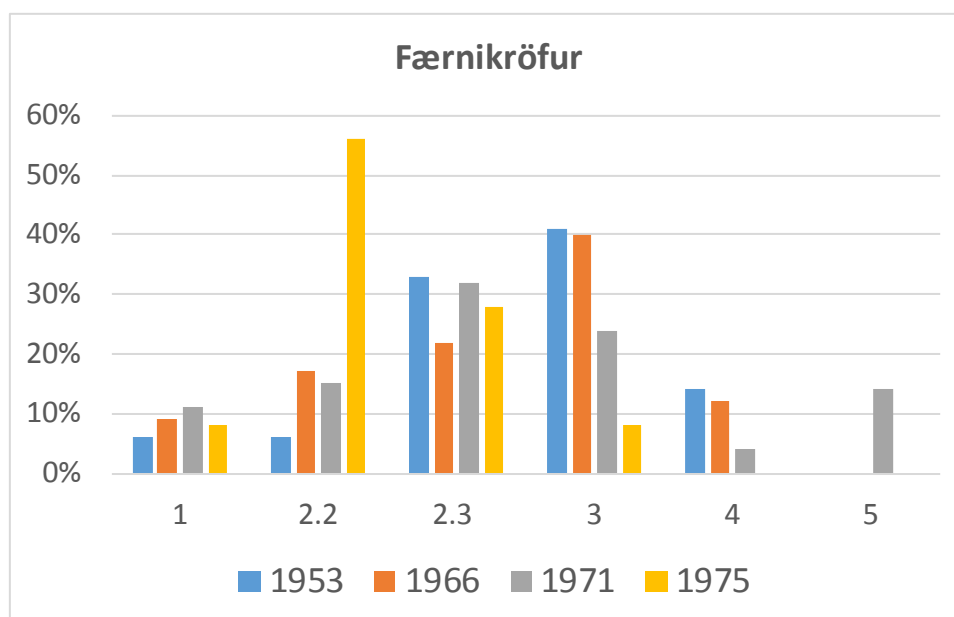
Ef litið er á skiptingu milli efnispáttanna í landsprófsverkefnum í heild má sjá að formúlur og jöfnur voru alla tíð um eða yfir 50% af prófinu. Séu hlutfallstölur í samræmdu könnunarprófi árið 2015 bornar saman við landsprófin, sem lögð voru fyrir 40–60 árum fyrr, má sjá að dreifing inntakspáttanna er orðin jafnari. Mælingar, flatarmál og rúmmál, hafa náð sínum fyrri sessi, áhersla á tölur (1.1–1.5) hefur aukist og er orðin fjölbreyttari, vegur rúmfræði (3 og 4) hefur aukist en algebra hefur dregist saman.

Færnikröfur

Greining færnipáttanna er háð meiri óvissu en greining inntakspáttanna. Greindir voru færnipættir landsprófanna árin 1953, 1966, 1971 og 1975 og hlutföll sett fram í Töflu 2. Til samanburðar voru áætlaðir færnipættir í samræmdu könnunarprófi fyrir 10. bekk. Minnt skal á að nota mátti vasareikni og prófið var eingöngu með fjölvalsspurningum. Ekki er unnt að álykta að um sama þyngdarstig sé að ræða þótt færnipættir séu hinir sömu. Greint var í eftirfarandi þætti:

Tafla 2 – Hlutfall færnipáttanna í prófverkefnum í stærðfræði						
		1953	1966	1971	1975	2015
1	Kunnátta	6%	9%	11%	8%	23%
2.2	Beiting rútnuaðferða án hjálparkækja	6%	17%	15%	56%	25%
2.3	Beiting flókinna og samsettra aðferða	33%	22%	32%	28%	27%
3	Könnun og lausnaleit	41%	40%	24%	8%	17%
4	Röksemdafærsla; velja rithátt, framsetningu, aðferðir	14%	12%	4%		8%
5	Tjáskipti (málnotkun og ritháttur)			14%		

Niðurstöður flokkunar færnipáttanna á landsprófunum árin 1953, 1966, 1971 og 1975 eru sýndar á Mynd 2.



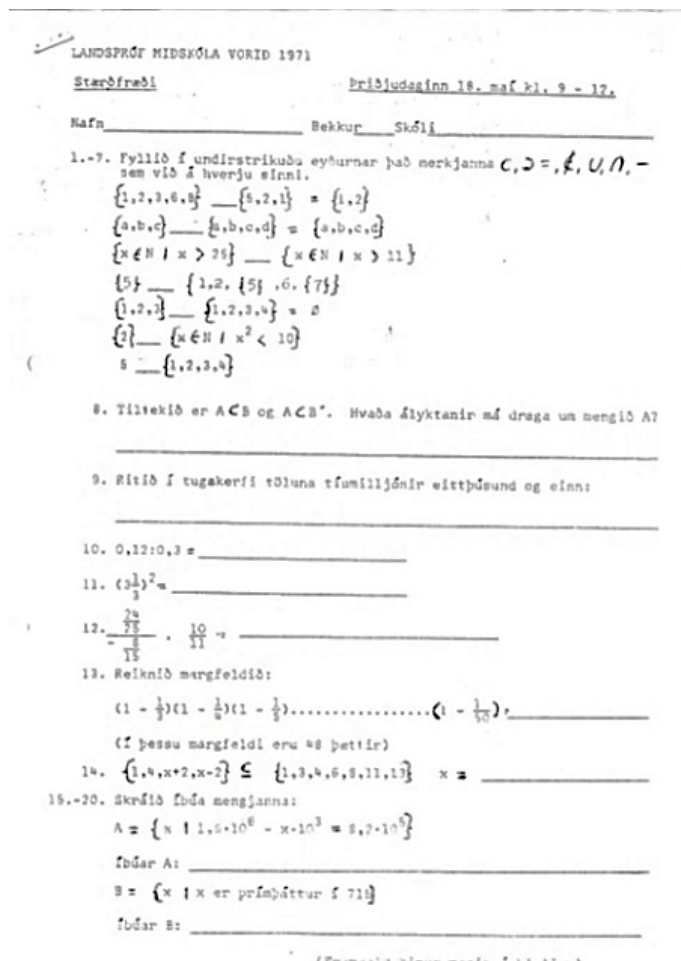
Mynd 2 – Hlutföll færnipáttanna í fjórum landsprófsverkefnum í stærðfræði.

Áberandi er hve kröfur um könnun og lausnaleit drögust saman en rútnuaðferðir komu í staðinn. Athyglisvert er að val á rithætti, framsetningu og reiknaðferðum, sem var algengt í fyrri prófverkefnum, er horfið í hinu síðasta. Nemendum var hjálpað skref fyrir skref við lausnaleit í orðadæmum með því að segja þeim hvaða stærðir þeir ættu að velja sem óþekktar stærðir og að setja upp jöfnu á ákveðnum stað í lausnaleitarferlinu. Ekki var lögð áhersla á tjáskipti með því að prófa málnotkun eða rithátt sérstaklega nema því að beita mengjarithætti rétt í prófverkefninu 1971. Í fljótu bragði virðist sem dreifing færniþátta sé jafnari í könnunarprófinu 2015 en í landsprófsverkefnum fyrir 40–60 árum, sagt með fyrirvara um notkun vasareikna og fjölvalsspurningar sem áður var getið.

Framsetning prófverkefna

Framsetning prófverkefnanna breyttist töluvert. Í fyrstu voru verkefni á tveimur blaðsíðum þar sem lesin dæmi voru prófuð fyrir daginn og því á sérblaði, en ólesin dæmi á einu blaði síðari daginn. Nemendur skráðu lausnir sínar á sérstakar prófarkir. Blöðunum fjölgaði og síðar var nemendum eingöngu ætlað að fylla út í eyður á prófverkefnablöðum. Prófverkefnið frá 1963 er dæmigert fyrir verkefni 1946–1965. Öll dæmin voru annaðhvort flókin algebrudæmi eða orðadæmi sem flest voru ætluð til að setja upp í jöfnu eða reikna rúmmál fremur flókinna gripa.

Sá hluti prófverkefnisins frá 1966 sem kom í stað lesinna dæma var álitinn vera létt dæmi, svo sem að raða brotum eftir stærð, tvö prósentudæmi, leysa jöfnu með tugabrotastuðlum, deila með ræðri algebrustærðu í aðra slíka, finna þvermál sívals potts, skipta stærðum á mismunandi vegu, leysa saman tvær jöfnur þar sem voru liðastærðir með tveimur óþekktum stærðum í nefnum, og finna hliðarlengd og þyngd ferningslagaðra platna. Dæmin stóðu undir 52% prófseinkunnarinnar.



Mynd 3. Fremsta blaðið í landsprófsverkefni í stærðfræði árið 1971.

Dæmin á fremsta prófblaðinu frá 1971 (mynd 3), þegar áhersla á tákniál mengjafræðinnar var í hámarki, teljast 16 atriði af 50 atriðum alls. Fyrstu sjö atriðin, 14% af prófinu, voru að þekkja og nota mengjafræðileg tákni rétt. Í dæmum 14–20 var mengjafræðileg framsetning notuð til að setja fram sjö opnar yrðingar, önnur 14%. Önnur dæmi voru líkari því sem áður hafði tíðkast.

Skilningur og landsprófsverkefni

Meginrökin fyrir því að taka upp hina svokölluðu nýju stærðfræði voru þau að hún stuðlaði að auknum skilningi á stærðfræði. Guðmundur Arnlaugsson sagði í formála bókar sinnar, *Tölur og mengi*, að áhersla á færni og vélræn vinnubrögð hefði þokað fyrir kröfum um aukinn skilning. Þessi þróun hefði ýtt nokkrum grundvallarhugtökum úr rökfræði, mengjafræði og algebru niður á barnaskólastig. Stærðfræðikennurum hefur löngum verið hugleikið hvernig megi efla og styrkja skilning nemenda á námsefninu. Hér verður því gerð stutt grein fyrir nokkrum kenningum um stærðfræðilegan skilning og leitast við að setja þær í samhengi við landspróf í stærðfræði og framkvæmd þess.

Richard Skemp (1978) greindi á milli *vélræns skilnings* (e. instrumental understanding) og *tengslaskilnings* (e. relational understanding). Sem dæmi má taka að sé tengslaskilningur fyrir hendi veit nemandinn ekki aðeins hvaða aðferð þarf að beita heldur líka hvers vegna. Skemp taldi að próf hefðu oft þau áhrif að kennsla undir þau ýtti undir vélrænan skilning, til dæmis að fara skyldi að á tiltekinn hátt þegar tiltekin kennileiti birtust í dæmum. Skemp grunaði að ýmislegt sem kynnt væri undir merkjum nýrrar stærðfræði væri kennt og lært með vélrænum skilningi, aðeins hefði verið skipt um efnisþætti.

Anna Sierpínska (1994, bls. xiv) taldi að skilningsferli (e. process of understanding) væri net *skilningsskrefa* (lattices of acts of understanding) sem tengd væru með röksemdafærslu, svo sem í útskýringum og með staðfestingu, til dæmis prófun. Mismunandi hindranir, sagði hún, fælust í hinum ólíku stærðfræðilegu aðstæðum, svo sem hugtökum, reglum eða þrautum. Ef í skilningsferli felst viss fjöldi viðeigandi skilningsskrefa til að yfirstíga hina tilteknu hindrun má ná tiltölulega góðum skilningi samkvæmt kenningu hennar.

Prófverkefni eru ekki námsefni sem nota má til að auka tengslaskilning Skemps eða bæta skilningsferli Sierpínsku. Hlutverk landsprófs í stærðfræði var að kanna hvort tiltekinni og samræmdri þekkingu hefði verið náð. Prófverkefni voru þó prentuð og gefin út opinberlega fram til 1962 og í mörgum skólum var töluverðum tíma varið til að fara yfir gömul próf. Bæði Matthías Jónasson og Skemp nefndu aðstæður sem gætu leitt til yfirborðslegs vélræns skilnings. Matthías nefndi að undirbúningstíminn fyrir landsprófið væri allt of stuttur. Eitt ár aðeins leiddi til of mikillar tímapressu og fljótaskriftar, og Skemp nefndi hættuna sem fylgdi því að kenna undir próf, hvort tveggja væri á kostnað hins dýpri tengslaskilnings. Nýja stærðfræði mætti einnig kenna og læra með vélrænum skilningi.

George Polya (1973) varpaði fram öðru sjónarhorni á skilning í bók sinni *How to Solve It*. Þar kynnti hann fjögurra skrefa aðferð við lausnaleit: Að *skilja – gera áætlun – framfylgja áætluninni – endurskoða*. Við gerð áætlunar mælti Polya með því að reyna að hugsa um svipað dæmi sem hefur áður komið fyrir og hefur sams konar eða svipaða óþekkta stærð. Skilningur væri fólgin í því að átta sig á hver óþekkta stærðin væri, hvaða gögn væru þekkt og hvaða skilyrði væru sett.

Hugmyndin með lesnum dæmum hefur væntanlega verið sú að tryggja iðnum nemendum möguleika á viðunandi árangri, en ef til vill líka að þróa færni við lausnaleit eins og Polya (1973) kenndi. Þá gætu nemendur hugsað við ólesin dæmi: Hef ég séð eitthvað svipað áður þar sem ég gæti notað sams konar aðferð? Nefna má einnig að ekki voru aðeins sett fram dæmi í algengum kennslubókum í stærðfræði fyrir unglinga, íslenskum og erlendum, langt fram á 19. öld, heldur einnig lausnir þeirra fyrir lesendur að læra af.

Umræða

Greinilegt er að uppbygging, framsetning, inntak og færnikröfur á landsprófi í stærðfræði breyttust mjög á árunum 1966–1976 frá því sem áður var og þá fjölgaði einnig verulega þeim sem sóttust

eftir inngöngu í menntaskóla. Prófverkefni 1947–1965 voru innbyrðis svipuð að efni og formi. Ástæðan hefur væntanlega verið sú að tryggja átti jafnræði, ekki aðeins milli nemenda frá ólíkum stöðum á landinu, eins og farið var af stað með, heldur einnig milli árganga. Einnig töldu menn sig skorta heimild til breytinga. Reglugerð (nr. 3/1937) um Menntaskólann í Reykjavík hafði verið lögð til grundvallar prófinu í upphafi og engin opinber fyrirmæli voru sett fram um annað. Breytingar voru ekki gerðar fyrr en að höfðu samráði við þar til bæra aðila.

Við innleiðingu nýju stærðfræðinnar breyttist inntak prófanna úr hefðbundnum reikningi í átt að rannsókn á náttúrlegum tölum, talnafræðilegu efni og mynstrum eins og *Drög að námsskrá* 1968 gerðu ráð fyrir. Mælingar, þ.e. flatarmál og rúmmál, drógust saman en fram kom vísir að tölfræði og líkindareikningi sem fulltrúi nýrra tíma, áhrif frá Royaumont-fundinum. Áhersla á algebru, jöfnur og formúlur, jókst og þessir þættir urðu meira en helmingur af prófinu. Svo virðist sem áhersla á hina ólíku inntakspætti hafi síðar jafnast ef skoðað er samræmt könnunarpróf 2015. Minni áhersla var lögð á stór dæmi þar sem þurfti að beita mörgum aðferðum eftir 1970 er nýja stærðfræðin kom til sögunnar. Orðadæmum fækkaði, þau urðu fábreyttari og sögðu oft enga sögu. Dæmin urðu æ styttri og þeim fjölgaði að sama skapi. Hlutfall orðadæma af heildarfjölda atriða minnkaði úr því að vera um tveir þriðju hlutar dæmanna niður í allt að einum fjórða hluta. Þá má minnast orða dr. Matthíasar Jónassonar sem spurði hvort svör við mergð samhengislausra smáatriða væru rétti mælikvarðinn á hæfni til æðri menntunar. Einnig má minna á spurningar hans um hugkvæmni, dómgreind, rökvísi og skapandi hugsun.

Færnikröfur beindust æ minna að því að nemendur veldu sjálfir hvað væru óþekktar stærðir, veldu heiti fyrir þær, reiknaaðferðir, uppsetningu og rithátt. Lesnu dæmin voru felld niður. Prófsejendur kunna að hafa gert sér vonir um að slakari nemendur, sem búist var við að yrðu æ stærri hluti þeirra sem spreyttu sig á prófinu, réðu betur við prófdæmi þar sem aðeins væri prófað úr einu atriði án sögu sem umbúða. Samræmt könnunarpróf 2015 var lagt fyrir við aðrar aðstæður, reiknivélar leyfðar og fjölvalsspurningar. Það virðist þó bera vott um aukna áherslu á könnun og lausnaleit, eins og verið hafði í fyrstu landsprófum miðskóla í stærðfræði, og einnig jafnari dreifingu færniþátta.

Erfitt er að álykta út frá prófunum hvort **nýja stærðfræðin leiddi til betri skilnings** á stærðfræðinni. Hlutverk mengjafræðinnar í námsefninu virðist aðallega hafa verið að æfa nýjan rithátt sem undirbúningur undir frekara nám. Á þessu stigi var aðeins hægt að beita rithættinum að litlu leyti við lausnaleit. Að sjálfsgöðu var ekki tími til þess á einu undirbúningsári undir landsprófi að fresta algebrunámi þar til náðst hefði að festa mengjafræði í sessi. Innleiðing mengjafræði til að auka skýrleik og skilning eins og menn höfðu vonast til hefur varla getað skilað árangri á þessu stigi en kann að hafa greitt nemendum leið á síðari stigum, í menntaskóla og háskóla.

Lokaorð

Ígrunda má hvort löng orðadæmi úr kennslubókum og gömlum prófum gætu veitt kennurum tækifæri til að sökkva sér djúpt ofan í viðamikil dæmi með nemendum sínum. Þar gætu gefist tækifæri til að skapa með nemendum skilningsferli, net skilningsskrefa tengd með röksemdafærslu, sem fælust í útskýringum og prófunum sem nemendur framkvæmdu sjálfir undir leiðsögn kennara sinna. Freistandi er að telja að missir hafi verið að lesnum dæmum sem harkalega var ráðist á í upphafi tímabils nýstærðfræðinnar á Íslandi.

Ekki verður þó horft fram hjá því að stærðfræði var mörgum nemendum þröskuldur á vegi þeirra að ná meðaleinkunninni 6 á landsprófi og þannig rétti til æðra náms, eins og það var þá kallað. Ekki má gleyma því að meðaleinkunn í stærðfræði á landsprófi lá lengi um 0,5 neðar en landsmeðaleinkunn og stundum enn neðar. Mögulegt er að stærðfræðilegar hindranir sem fólust í prófverkefnum hafi verið of miklar á þessum tímamarki í lífi nemenda. Með mörgum og smáum prófdæmum færðist stærðfræðieinkunnin nær meðaltalinu í öllum greinum og hætti að vera jafnmörgum ungmönnum til trafala á menntabrautinni og áður hafði verið. Þeirri spurningu er þó ósvarað hvort stutt innihaldslítil dæmi hafi haft áhrif á viðhorf nemenda til stærðfræði til hins betra eða verra.

Heimildir

Bjarni Vilhjálmsson. (1952). *Landspróf miðskóla 1946–1951*. Reykjavík: Fræðslumálastjórnin.

Bjarni Vilhjálmsson. (1959). *Landspróf miðskóla 1952–1958*. Reykjavík: Bókaútgáfa Menningarsjóðs.

Bjarni Vilhjálmsson. (1963). *Landspróf miðskóla 1957–1962*. Reykjavík: Bókaútgáfa Menningarsjóðs.

Bráðabirgðareglur um miðskólapróf í bóknámsdeild, nr. 24/1946.

Drög að námsskrám fyrir barnaskóla og gagnfræðaskóla (1948). Reykjavík: Gutenberg.

Einar Magnússon. (1975). 2.6. Menntaskólinn 1946–1969. Í Heimir Þorleifsson (ritstjóri). Saga Reykjavíkurskóla : historia Scholæ Reykjavicensis, 1. bindi, *Nám og nemendur* (bls. 90–98). Reykjavík: Menningarsjóður, Sögusjóður Menntaskólans í Reykjavík.

Guðmundur Arnlaugsson. (1966). *Tölur og mengi*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Gunnar M. Magnúss. (1946). Um menntamál á Íslandi 1944–1946. *Greinargerð um löggjöf, framkvæmdir og næstu verkefni*. Reykjavík: Menntamálaráðuneytið.

Halldór Elíasson. (1966). *Stærðfræði og stærðfræðikennsla*. Menntamál 39(2), 91–99.

Hörður Lárusson. (1973). *Stærðfræði handa unglingskólum*. Textahefti C. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Hörður Lárusson. (1974). *Stærðfræði handa 9. bekk grunnskóla*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Jón Á. Gissurarson og Steinþór Guðmundsson. (1949–1950). *Reikningsbók handa framhaldsskólum II A*. Reykjavík: Ísafoldarprentsmiðja.

Jónas Pálsson og Hjálmar Ólafsson. (1961). Athuganir á landsprófi miðskóla. *Skírnir* 135, 195–210.

Kristín Bjarnadóttir. (2006/2007). Mathematical education in Iceland in historical context – Socio-economic demands and influences. Reykjavík: Háskólaútgáfan. Sótt af [http://rudar.ruc.dk/bitstream/1800/2914/1/-Chapter0 IMFUFA.pdf](http://rudar.ruc.dk/bitstream/1800/2914/1/-Chapter0%20IMFUFA.pdf).

Kristín Bjarnadóttir. (2015). Tölur og mengi – Numbers and sets. A New Math textbook in Iceland in the 1960s. *NOMAD*, 20(3-4), 11–33.

Landsprófsnefnd. (1968). *Drög að námsskrá í landsprófsdeildum miðskóla*. Reykjavík: Menntamálaráðuneytið.

Lög um menntaskóla, nr. 58/1946.

Matthías Jónasson (1967). *Mannleg greind*. Reykjavík: Mál og menning.

Matthías Jónasson. (1968). Landsprófið og vandi þess. *Lesbók Morgunblaðsins*, 5. maí. Reykjavík.

Már Ársælsson. (1969). *Algebra I–II*. Reykjavík: Ríkisútgáfa námsbóka.

Menntamálaráðuneytið. (1960). *Námsskrá fyrir nemendur á fræðsluskyldualdri*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálastofnun. (2015). 10. bekkur 2015. *Stærðfræði. Samræmt könnunarpróf*. Námsmatsstofnun.

- OEEC (1961). *New Thinking in School Mathematics*, 2. útgáfa. París: OEEC.
- Ólafur Daníelsson. (1920). *Reikningsbók*. (Endurútgefin til 1956). Reykjavík: Arinbjörn Sveinbjarnarson.
- Ólafur Daníelsson. (1951). *Kennslubók í algebru*. (Fyrsta útgáfa 1927). Reykjavík: Ísafoldarprentsmiðja.
- Polya, G. (1973). *How to solve it*. Önnur útg. Princeton: Princeton University Press.
- Reglugerð fyrir Menntaskólann í Reykjavík, nr. 3/1937.
- Reglugerð um miðskólapróf í bóknámsdeild nr. 51/1947.
- Robitaille, D. F., Schmidt, W. H., Raizen, S., Mc Knight, C., Britton, E., og Nicol, C. (1993). TIMSS monograph no. 1. *Curriculum frameworks for mathematics and science*. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Sierpínska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer Press.
- Sigler, L. (2003). Fibonacci's Liber Abaci. *Leonardo Pisano's Book of calculations*. New York: Springer.
- Skemp, R. R. (1978). Relational and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 37-50.
- MMRN 2016 DB/1(1), DB/1(2), DB/2(1), DB/3(1). DB/5(1), DB/6(1). *Landspróf miðskóla, einunnir*. 1946–1973. Menntamálaráðuneytið.
- Þ.Í. Menntamálaráðuneyti – Fræðslumál 1986 BA/63. *Skýrslur landsprófsnefndar 1946–1973*. Þjóðskjalasafn Íslands.
- Þ.Í. Menntamálaráðuneyti – Fræðslumál 1986 BA/62-BA/67. *Landsprófsverkefni 1946-1975*. Þjóðskjalasafn Íslands.

Um höfund

Kristín Bjarnadóttir (krisbj@hi.is) er prófessor emerita við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hún lauk B.A.-prófi í eðlisfræði og stærðfræði frá Háskóla Íslands 1968, M.Sc.-námi í stærðfræði frá Oregonháskóla í Eugene 1983 og Ph.D.-gráðu í stærðfræðimenntun frá Háskólanum í Hróarskeldu 2006. Hún kenndi stærðfræði og eðlisfræði við grunnskóla og framhaldsskóla fram til 2003, og stærðfræðimenntun við Kennaraháskóla Íslands og Menntavísindasvið 2003–2013. Rannsóknaráherslur hennar varða stærðfræðikennslu á unglinga- og framhaldsstigi og sögu hennar.

Efnisorð

Landspróf miðskóla – nýja stærðfræðin – inntaksgreining – færningreining – stærðfræðiskilningur.

About the author

Kristín Bjarnadóttir (krisbj@hi.is) is professor emerita at the University of Iceland – School of Education. She completed BA degree in physics and mathematics at the University of Iceland in 1968, M.Sc.-degree at the University of Oregon in Eugene in 1983 and Ph.D.-degree in mathematics education at Roskilde University in 2006. She taught mathematics and physics at compulsory school and upper secondary school levels until 2003 when she joined the University of Education, later School of Education at the University of Iceland, where she taught mathematics education. Her research interests concern mathematics teaching at high school level and its history.

Key words

National entrance examination to grammar school – New Math – content analysis – performance analysis – understanding in mathematics.



Kristín Bjarnadóttir. (2016).

Landspróf miðskóla 1946–1976. Áhrif nýju stærðfræðinnar.

Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun: Sérít 2016 – Menntun, mannvit og margbreytileiki. Greinar frá Menntakviku Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

http://netla.hi.is/serrit/2016/menntun_mannvit_og_margbreytileiki_greinar_fra_menntakviku/006.pdf