Þemahefti

gullinsnið

Kennsluleiðbeiningar

Námsgagnastofnun
9. mars 2007
09785

Efnisyfirlit

Gullinsnið – Kennsluleiðbeiningar

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2007
Námsgagnastofnun

Umbrot og útlit: Námsgagnastofnun

Inngangur

Þetta hefti fjallar um sérstakt hlutfall sem nefnt hefur verið *gullinsnið*. Það er skilgreint í fornu grísku riti, *Frumþáttum* eftir Evklíð. Tilgangur þess þar er að kynna aðferð til að teikna fimmhyrning nákvæmlega.

Gullinsniðshlutfall er um það bil 1,618:1. Það er mjög nálægt hlutföllunum 8:5, 5:3 eða jafnvel 3:2. Þessi hlutföll finnast víða í náttúrunni, einnig í hönnun og list. Í sumum tilvikum er vitað að leikið er vísvitandi með gullinsnið en í öðrum tilvikum þykir víst að engin tengsl séu þrátt fyrir að líkindi sé að finna.

Gullinsnið er ekki heiltöluhlutfall. Hlutföllin sem að framan voru nefnd eru hins vegar hlutföll milli heilla talna sem allar eru úr Fibonacci-rununni svonefndu:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Eitt af viðfangsefnum heftisins er að tengja saman gullinsnið og Fibonacci-rununa. Markgildi hlutfallsins milli tveggja samliggjandi liða rununnar er einmitt gullinsniðshlutfallið. Viðbúið er að nemendur vilji vita meira um þessi tengsl og af hverju þau stafa. Í heftinu er leitast við að skýra tengslin.

Hugmyndin með heftinu er að kennarar, nemendur og aðstandendur þeirra fái tækifæri til að gleðjast yfir þeirri furðu sem nánari kynni við gullinsnið og skyld hlutföll vekja með mörgum. Ef vel tekst til gæti vinnan orðið til þess að lesendur næðu bættum tökum á hlutfallshugtakinu og sæju byggingar, listaverk og náttúrufyrirbrigði í nýju ljósi.

Gullinsnið

(bls. 1–2)

Þessi kafli er hugsaður sem kynning á gullinsniðshlutfallinu. Nemendur eru beðnir að velja milli nokkurra rétthyrninga, hver þeirra sé fallegastur eða þægilegastur fyrir augað. Taka má rétthyrninga úr umhverfinu, t.d. veggi, gólfflöt, bækur eða annað sem hendi er nær. Vissulega er ekkert rétt svar við því hvaða hlutfall sé fegurst en fróðlegt er að fylgjast með hversu stór hluti velur hlutfall sem líkist gullinsniði.

Það er eitt megineinkenni rétthyrninga í gullinsniði, gullinna rétthyrninga, að sé ferningur skorinn af þeim verður afgangurinn nýr rétthyrningur í gullinsniði. Vakin er athygli á þessu í 3. dæmi á bls. 2. Halda má áfram, eins lengi og nákvæmni og sjón leyfa, að skera ferninga af rétthyrningnum og fá nýja minni rétthyrninga í sama hlutfalli. Mikilvægt er að lengdir séu nákvæmar. Annars missa menn fljótt sjónar á því að hlutföllin endurtaka sig þó að rétthyrningarnir smækki og smækki.

Þegar teiknaðir eru hringfjórðungar inn í ferningana sem skornir eru af gullna rétthyrningnum þarf að huga að því hvar miðja hringsins er sett niður í hverjum ferningi. Miðja hvers hringboga er ætíð í því horni ferningsins sem snýr inn í myndina og þannig að boginn myndi samfellt framhald af fyrri boga.

Svör við dæmum

(bls. 1–2)

1. Ýmis svör.

2. a) Lengd: 10,0. Breidd: 6,18

   b) 1,62.

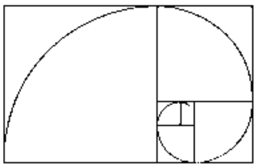
3. a) og b) Nauðsynlegt er að myndin sé mjög nákvæm. Annars missir verkefnið marks.
   c) Sé teikningin rétt ætti rétthyrningurinn hægra megin að hafa sama hlutfall og upphaflegi rétthyrningurinn. Lengd hans ætti að vera 10,0 cm og breiddin 6,2 cm.

4. a) Hlutfallið er nálægt 1,62.

   b) og c) Hlutfallið ætti enn að vera um 1,62.

   d) Sé nákvæmlega teiknað ætti hlutfallið að varðveitast,
   en rétthyrningarnir smækka og smækka.

5.



Kuðungurinn

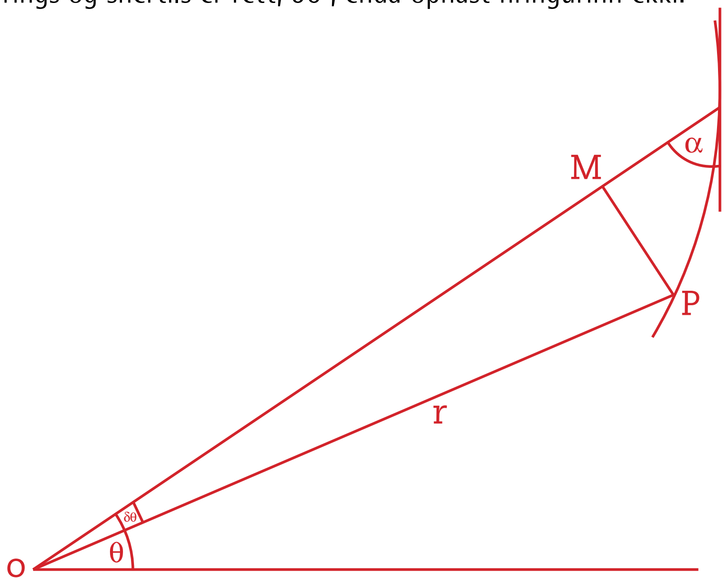
(bls. 3–4)

Hlutfallið milli lengda geisla samsvarandi hringboga, t.d. hins fyrsta og hins fimmta talið eftir stærð, er gullinsniðshlutfallið φ í fjórða veldi eða u.þ.b. 6,854. Geisli vefjunnar í gullna rétthyrningnum, út frá miðju hennar, er sívaxandi og hlutfallið milli lengda geisla í sömu stefnu stefnir á sama hlutfall, φ^4.

Hlutfallið milli geisla í sömu stefnu í kuðungnum á myndinni er minna eða um það bil 3. Eðli vefjanna er þó hið sama, geisli vefjunnar margfaldast með fastri tölu fyrir hvert nýtt vaf. Gott væri að hafa þversniðinn kuðung við höndina til að mæla hlutföllin í honum.

Logravefja

Logravefja hefur þá eiginleika að hornið α milli geisla hennar og snertils við vefjuna á hverjum stað er alls staðar hið sama. Hornið er alltaf minna en rétt horn, þar sem annars opnaðist vefjan ekki eins og hún gerir. Til samanburðar má minna á að hornið milli geisla hrings og snertils er rétt, 90°, enda opnast hringurinn ekki.



Gildi k stefnir á $k = \varphi^{\left(\frac{4}{2\pi}\right)} \approx 1{,}358$.

Hornið er α í vefju gullna rétthyrningsins um það bil 73°.

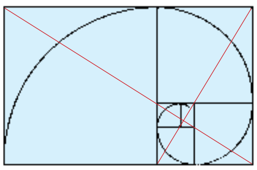
Sjá nánari útreikninga í Viðauka I.

Um Fibonacci-rununa má víða lesa, t.d. í bók Jóns Þorvarðarsonar *Og ég skal hreyfa jörðina* (Útgefandi: STÆ ehf. 2005).

Svör við dæmum

(bls. 3–4)

1. Hornalínurnar skerast í kjarna kuðungsins.



2. a) Fibonacci-runan: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, **34**, **55**, **89**, 144, 233, 377, ...

   b) $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{5}{3} = 1{,}666\ \ldots$, $\frac{21}{13} = 1{,}615\ \ldots$, $\frac{89}{55} = 1{,}61818\ \ldots$, $\frac{377}{233} = 1{,}61802575\ \ldots$,

   $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{8}{5} = 1{,}6$, $\frac{34}{21} = 1{,}619\ \ldots$, $\frac{144}{89} = 1{,}6179775\ \ldots$,

   $\frac{3}{2} = 1{,}5$, $\frac{13}{8} = 1{,}625$, $\frac{55}{34} = 1{,}6176\ \ldots$, $\frac{233}{144} = 1{,}6180555\ \ldots$,

   Hlutfallið stefnir á φ.

3. Svo mikið er að finna um Fibonacci-rununa á Netinu að vandi er að velja það sem vandað er og traust heimild. Óhætt er að mæla með Wikipedia-alfræðiorðasafninu og vefjum ýmissa háskóla.

4. Rétthyrningurinn sem myndast með því að raða saman ferningum með Fibonacci-tölur sem hliðarlengd líkist meir og meir gullnum rétthyrningi þar sem hlutfall milli lengdar og breiddar er φ, á sama hátt og hlutfall samliggjandi liða í Fibonacci-rununni stefnir á φ.

Gullinsnið og fegurð

(bls. 4–5)

Margir listamenn hafa verið orðaðir við að nota gullinsniðshlutfall í verkum sínum. Má þar t.d. nefna ítalska listamanninn Leonardo da Vinci og hollenska málarann Piet Mondrian. Ekki þarf þó alltaf að vera að listamennirnir hafi notað hlutfallið meðvitað. Ekki er t.d. talið að Piet Mondrian hafi ætlað sér að nota reikningsleg hlutföll þótt hlutföll margra rétthyrninganna í myndinni í dæmi 1, sem nefnd er *Place de la Concorde*, séu nálægt gullinsniði.

Kynnt er klassísk aðferð til að hanna gullinn rétthyrning. Lengdin MC er hér lykilatriði. Hún verður til að marka lengd rétthyrningsins. Margir átta sig ekki á að MC og MF eru jafnlöng strik þar sem C og F eru punktar á hringboga með miðju í M. Þess vegna er rétt að vekja athygli á að AF er AM + MF.

Svör við dæmum

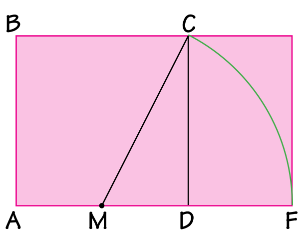
(bls. 4–5)

1. Hlutföll lengda og breidda í rétthyrningunum xxxx, yyyy og zzzz eru nálægt gullinsniði. Ljóst er þó að vandi er að mæla þessa rétthyrninga, jaðrar þeirra eru markaðir með breiðum strikum og myndin er lítil. Innanmál rétthyrninganna er nær gullinsniðshlutfallinu en utanmál þeirra. Fjórða rétthyrninginn í svipuðu hlutfalli má finna með því að hliðra yyyy að ystu lóðréttu línunni til vinstri. Horn rétthyrnings í svipuðu hlutfalli afmarkast af báðum z-punktunum að neðan og gula reitnum að ofan. Annan lítinn rétthyrning má finna efst í vinstra horninu, þar sem x-punktur er í efra vinstra horni, en y-punktur í neðra hægra horni.

2. a)-c) Lengd MC er 11,18

   d) MF er 11,18 og AF er 16,18

   e)-f) $\frac{AF}{AB} = \frac{16,18}{10} = 1,618$



Reikna má gullinsnið nákvæmlega út frá þessari teikningu. Ef hliðarlengd ferningsins, AB, er 2 einingar þá er lengd skálínunnar innan hans, $MC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ samkvæmt Pýþagórasarreglu.

Þá er MF líka $\sqrt{5}$ og AF = $1 + \sqrt{5}$. Þá er hlutfallið milli lengdar og breiddar $\frac{AF}{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sem er nákvæmt gildi gullinsniðshlutfallsins.

3. Hlutfall lengdar og breiddar í stóra rétthyrningnum er $\frac{34}{20} = 1{,}7$ en í hvíta rétthyrningnum $\frac{20}{14} = 1{,}4$. Hvíti rétthyrningurinn er hlutfallslega styttri og breiðari en stóri rétthyrningurinn.

4. Hlutfall lengdar og breiddar í stóra rétthyrningnum er $\frac{4{,}86}{2} = 2{,}41$ og í litla rétthyrningum $\frac{2}{0{,}823} = 2{,}41$. Hlutfallið er hið sama en hér er ekki um gullinsnið að ræða.

   Ef hlutföllin væru reiknuð nákvæmlega væru þau $\frac{2 \cdot \sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$.

   Þetta má rökstyðja með eftirfarandi útreikningum:

   Skemmri hlið bláa rétthyrningsins er 2 og þá er lengd skálínunnar $2 \cdot \sqrt{2}$ samkvæmt Pýþagórasarreglu. Hlutfallið í stóra rétthyrningnum er því $\frac{2 \cdot \sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$.

   Í litla hvíta þríhyrningnum er lengd styttri hliðarinnar $2 \cdot \sqrt{2} - 2$ og hlutfallið er
   $\frac{2}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

   Sýna mætti nemendum sem kunna lítið eitt í algebru að
   $\frac{1}{\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1} = \sqrt{2} + 1,$
   eða sama hlutfallið og í stærri rétthyrningnum.

   Þetta er kjörið tækifæri til að draga fram með nemendum regluna
   $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ í nýstárlegu samhengi.

Mannslíkaminn
(bls. 6)

Þetta verkefni ætti að festa hugtakið hlutfall með nemendum og gefa tilefni til skemmtilegra athugana og samanburðar. Þótt bent sé á handarjaðarinn á myndinni af beinum í mannshendinni, er líklega betra að byrja á að mæla handarbeinin á miðju handarbakinu frá úlnlið og fram á fingurgóm löngutangar, en vissulega má mæla fram á hvað fingur sem er.

Le Corbusier og Modulor
(bls. 7)

Gagnstætt listamanninum Mondrian, sem nefndur er hér að framan, notaði franski arkitektinn Le Corbusier gullinsniðshlutfallið meðvitað. Þessu verkefni er lítið stýrt með spurningum til nemenda heldur er meginhugmyndin að nemendur finni sem flest hlutföll sjálfir út frá tölunum sem gefnar eru á myndinni. Myndin gefur einnig mörg tilefni til samanburðar á hlutföllum hennar og mælingum nemenda.

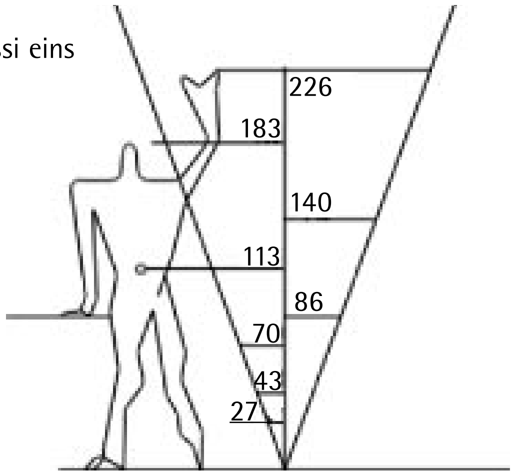
Talnakerfi Le Corbusier er byggt á gullinsniði. Hlutfallið milli hæðar mannsins á móti hæð að mitti, $\frac{182,9}{1130}$ = 1,6186, átti að vera eins nálægt gullinsniði og nákvæmni talnanna leyfir.

Sjá má mörg önnur hlutföll sem eru mjög nálægt gullinsniði, t.d.

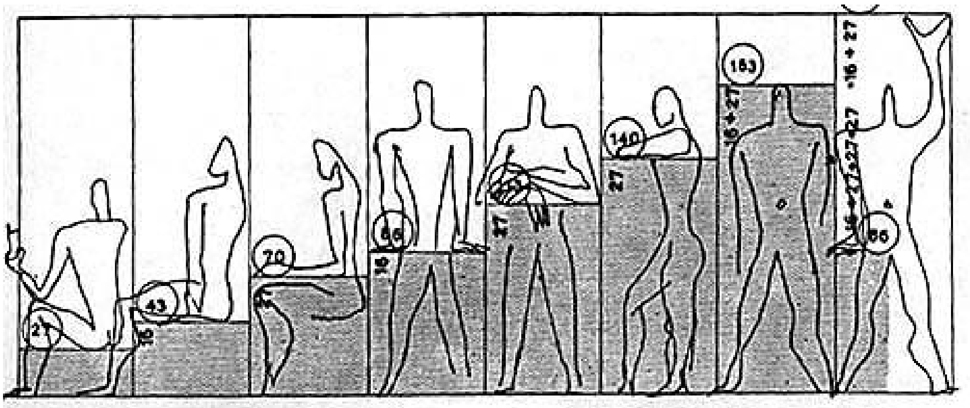
$\frac{1130}{698} = 1{,}6189$ $\frac{\text{Hæð neðan mittis}}{\text{hæð ofan mittis}}$

$\frac{698}{432} = 1{,}6157$ $\frac{\text{Hæð ofan mittis}}{\text{lengd framhandleggs}}$

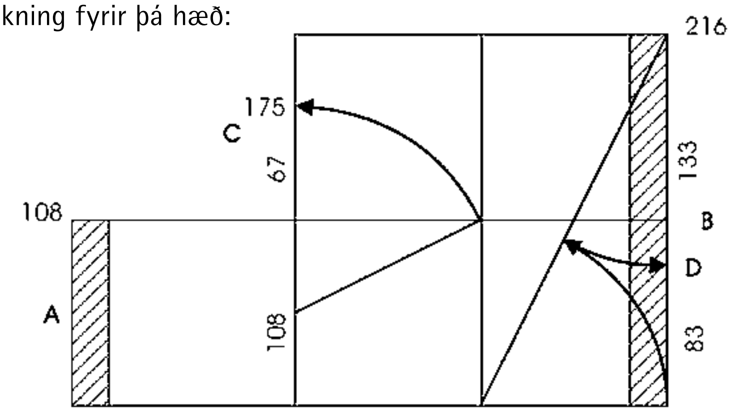
Mæld í cm verða hlutföllin þessi eins og til hliðar er sýnt.



Tölurnar koma síðan fram í hinum ýmsu stellingum mannslíkamans.



Modulor-kerfið var upphaflega gert fyrir lægri menn, 175 cm að hæð.
Þetta er grunnteikning fyrir þá hæð:



Á teikningunni sést hvernig gullinsnið er notað til að hanna hugsað hlutfall milli hæðar mannsins og hæðar hans að mitti, $\frac{175}{108} = 1{,}620$. Athugið að hönnunin á gullinsniðshlut föllunum í þessari teikningu er hin sama og í teikningunum á bls. 5 og bls. 14 í *Gullinsniði*.

Gullinsnið í byggingarlist

(bls. 8–9)

Vitað er um margar byggingar þar sem gullinsnið hefur verið haft að leiðarljósi. Fáar byggingar eru þó eins skýrt dæmi um það og Þjóðmenningarhúsið. Hér eru nokkur dæmi um hvar þau er að finna í teikningu þessarar svipmiklu byggingar:

Svör við dæmum

(bls. 8–9)

1. Rammarnir fjórir sem hver umlykur tvo glugga á fyrstu hæð og fimm glugga á efri hæð eru í gullinsniðshlutfalli eins og sýnt er hér að ofan. Enn fremur er miðja hússins ferningur þegar þakið er tekið með og rétthyrningarnir hvor sínum megin eru gullinsniðsrétthyrningar.

   Miðja framhliðarinnar undir þakinu er einnig í gullinsniði. Síðan má sýna að ýmsar samsetningar á þessum rétthyrningum mynda einnig gullna rétthyrninga.

   Skemmtilegast er fyrir nemendur að draga þetta fram sjálfir, t.d. í samvinnu tveggja eða fleiri.

2. Litla sveitakirkjan er einfalt dæmi um þekkingu manna á notkun gullinsniðs í byggingum á fyrri tíð. Grunnmynd kirkjunnar sjálfrar er í gullinsniði og kór hennar einnig en kirkjuskipið er ferningslaga.

3. Þar sem framhlið kirkjunnar er römmuð inn í ferning verður hliðarmynd kirkjunnar í sömu hlutföllum og grunnmyndin, þ.e. í gullinsniði.

4. Dyr kirkjunnar eru í gullinsniði.

5. Gaman væri að fela nemendum að finna hlutföll sem líkjast gullinsniði, t.d. í gömlum íslenskum kirkjum eða torfbæjum. Vekja má athygli á riti Harðar Ágústssonar arkitekts um íslenska byggingarlist þar sem hann bendir á gullinsnið í ýmsum byggingum.

Gullinn þríhyrningur

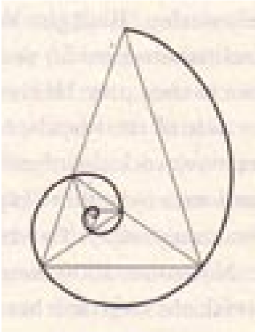
(bls. 10)

Hlutfallið milli lengda hliðar og grunnlínu í jafnarma þríhyrningi með hornin 72°, 72° og 36° er gullinsnið. Sé annað grunnlínuhornið helmingað og framlengt að mótlægri hlið verður annar helmingur hornsins topphorn í nýjum, minni, jafnarma þríhyrningi í sömu hlutföllum. Eftir stendur einnig jafnarma þríhyrningur með hornin 36°, 36° og 108°.

Mörgum þykir gaman að teikna þetta símynstur þannig að þríhyrningarnir minnki og minnki. En þá verður teikningin að vera nákvæm.

Hægt er að teikna logravefju utan um gullinn þríhyrning. Miðja hvers vefjuhluta verður í 108° horninu í breiða þríhyrningnum sem eftir verður þegar gullinn þríhyrningur er skorinn frá.

Hlutfall vefjunnar er ekki eins auðreiknað og í gullna rétthyrningnum. Þar snerust rétthyrningarnir um 90° eða rétt horn í hverri minnkun, eða stækkun, eftir því í hvora áttina er talið. Rétt horn gengur fjórum sinnum upp í heilan hring og því mátti segja að hlutfallið milli rétthyrninga sem sneru eins væri φ^4. Í gullna þríhyrningnum er



snúningurinn um 108° milli samsvarandi mynda. Nú er $\frac{360°}{108°} = \frac{10}{3}$, svo að geislinn stefnir þá á að margfaldast með $\varphi^{\frac{10}{3}}$. Þess vegna stefnir horn geislans við snertilinn á hverjum stað á 76°.

Svör við dæmum

(bls. 10)

1. a)-b) 36°

   c) 16,2 cm

   d) 1,62

   e) Hlutfallið er hið sama og hlutfallið milli lengdar og breiddar í gullna rétthyrningnum, gullinsnið.

2. a)-b) Hornin eru 72°, 36° og 72° eins og í upphaflega þríhyrningnum. Þríhyrningurinn BCD er einslaga við þríhyrninginn ABC og hlutfallið milli lengda hliða og grunnlínu í BCD hið sama og í ABC. Armarnir eru 10 cm langir og grunnlínan 6,2 cm.

3. a)-b) Hálft hornið er 36°. Hægt er að halda áfram að fá nýja þríhyrninga í sömu hlutföllum eins lengi og sjón og nákvæmni endist.

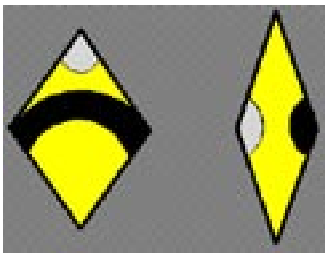
   c) Hlutfallið milli hliðarlengdanna er 1,62, gullinsniðshlutfallið.

Þakning með Penrose-flísum

(bls. 11)

Penrose-þakning er kennd við Roger Penrose, prófessor í stærðfræði í Oxford í Englandi. Sá þáttur þakningar með Penrose-flísum sem mesta athygli hefur vakið er að Penrose hefur sýnt fram á að hægt sé að þekja flöt með pílunni og flugdrekanum þannig að ekki myndist símynstur, þ.e. að mynstrið endurtaki sig ekki með reglulegum hætti. Um þetta efni er tilvalið að stofna til leitarvinnu á Netinu og í tiltækum bókum.

Í þessari grein eru einnig nefndar aðrar flísar, mjói og breiði tígullinn, sem má búa til úr tveimur grunnþríhyrningum. Hér er sýnishorn af mjóa og breiða tíglinum. Þeir hafa verið skreyttir þannig að þegar þeim er raðað saman mynda skreytingarnar bönd eða hringi eftir því hvernig flísunum er raðað.



Þessa tígla má nota til að þekja flöt þannig að samsvarandi litir mætist. Upplagt er að gera tilraunir með liti og mynstur.

Fimmhyrningur og fimmarma stjarna

(bls. 12)

Gert er ráð fyrir að nemendur mæli fyrst hornin sem merkt eru og átti sig svo á hornastærð í reglulegum fimmhyrningi. Síðan má leiða nemendur að þeirri vitneskju að stærð hornanna má staðfesta með reikningi, þ.e. með því að reikna fyrst summu horna í þremur þríhyrningum, $3 \cdot 180° = 540°$, og deila svo með 5 til að finna stærð hvers horns í reglulegum fimmhyrningi. Stærð hvers horns í fimmhyrningnum er þá $540° : 5 = 108°$.

Í þessu sambandi má reyna að þekja flöt með fimmhyrningum. Það tekst ekki þar sem þrjú horn eru samanlagt $3 \cdot 108 = 324°$ og þá vantar 36° í heilan hring. Þar mætti fella gullna þríhyrninginn inn. Gaman væri að ræða leiðir til að þekja flöt með fimmhyrningum og gullnum þríhyrningum og hvort það sé yfirleitt hægt.

Í tengslum við þetta verkefni mætti einnig leiða athyglina að því að tólf fimmhyrningar mynda lokaðan flöt, tólfflötung. Sé það tekið með er best að nota fimmhyrninga úr hörðu plasti sem hægt er að krækja saman til að mynda tólfflötunginn.

Svör við dæmum

(bls. 12)

1. a) Hornin r, t, u, x, y eru öll 36°. Hornin v og w eru 72° og s og z eru 108°.
   b) Í miðið er gullni þríhyrningurinn með 72°, 36° og 72° horn.

2. Hornalínur fimmhyrnings mynda fimmarma stjörnu.

3. Þríhyrningarnir AJF, BFG, CGH, DHI og EIJ eru allir gullnir þríhyrningar þar sem hlutfallið milli arms og grunnlínu, t.d. $\frac{AF}{FJ}$, er gullinsnið, 1,618.

   Ef litið er á þríhyrninginn ADG, sem er einn af fimm eins þríhyrningum í stjörnunni, þá er hlutfallið milli grunnlínu og arms, $\frac{AD}{AG}$, einnig gullinsnið.

   Dæmi um önnur gullinsniðshlutföll í fimmarma stjörnunni eru $\frac{AC}{AG}$, $\frac{AG}{AF}$ og $\frac{AF}{FG}$.

Ikebana

(bls. 13)

Vel má halda því fram að Ikebana – blómaskreytingarnar lúti ekki hreinu gullinsniðshlutfalli. Hins vegar gæti verkefnið dregið athygli nemenda að hlutverki hlutfalla í hönnun, listum og skreytingu og vakið áhuga þeirra á að leita til hönnuða og listamanna í leit að hugmyndum þeirra um hvernig hlutföll eins og gullinsnið eru notuð í hönnunarvinnu og listsköpun.

Gullinsnið í *Frumþáttum* Evklíðs

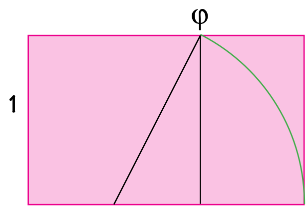
(bls. 14)

Æskilegt er að þeir nemendur sem eiga gott með algebru kynnist hinum fræðilega grundvelli gullinsniðs. Verkefnin gefa innsýn í tengsl algebru við myndrænar stærðir auk þess sem óvænt tengsl við Fibonaccitölur koma fram.

Ef skemmri hliðin í gullinsniðsrétthyrningi er 1 eining að lengd þá er lengd lengri hliðarinnar φ.

Skemmri hliðin í litla rétthyrningnum verður þá $\varphi - 1$.

Þar sem hlutföll hans eru jöfn hlutföllunum í stóra rétthyrningnum þá eru $\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$.



eða sömu hlutföllin og í teikningunni í bók Evklíðs.

Svör við dæmum hér að neðan má finna með reikningi á reiknivél en einnig leiða út með algebru. Nákvæmari reikningsleg útfærsla á dæmum nr. 4 og 5, þar sem reiknað er með hlutfallinu $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, er sýnd í viðauka II.

Svör við dæmum

(bls. 14–16)

1. CQ ætti að verða 3,82 cm en QB = 6,18 cm. Hlutfallið $\frac{QB}{CQ} = \frac{6{,}18}{3{,}82} = 1{,}62$.
   Ekki er hægt að búast við nema eins aukastafs nákvæmni í teikningunni og þá er hlutfallið $\frac{6{,}2}{3{,}8} = 1{,}6$.

2. $\varphi^2 - \varphi = 1$
   Þessi jafna er jafngild jöfnunni $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, sem fæst þegar talan 1 er dregin frá báðum hliðum fyrri jöfnunnar.

3. $\varphi = 1{,}61803398874989 \ldots$
   Í viðauka verða svör leidd út nákvæmlega með því að nota $\sqrt{5}$ en nemendur finna væntanlega námundagildi með reiknivél nema kennari leiði þá til annars.

4. a) 0,618...
   Ef deilt er með φ í báðar hliðar jöfnunnar á bls. 14, $\varphi(\varphi - 1) = 1$,
   verður jafnan $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$

   b) 1,618...
   Það leiðir beint af jöfnunni í a)-lið að $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$, þegar 1 er bætt við báðar hliðar hennar.

5 a) 1,618...
   $\varphi^2 - 1 = \varphi$ má lesa út úr jöfnunni í dæmi 2, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, ef φ er bætt við báðar hliðar jöfnunnar.

   b) 1,618...
   Ef deilt er í báðar hliðar jöfnunnar $\varphi(\varphi - 1) = 1$ með $\varphi - 1$
   verður jafnan $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$.

6. Rökstuðningurinn tengist því sem sagt er um 4. dæmi. Ef báðar hliðar jöfnunnar $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ eru margfaldaðar með φ verður jafnan $\varphi(\varphi - 1) = 1$, jafnan á bls. 14.

7. Þetta dæmi þarf að skoða gaumgæfilega vegna þess sem á eftir kemur.

8. (Nánari útreikningar eru í viðauka III).

   a) $\varphi^4 = 3\varphi + 2$

   b) $\varphi^5 = 5\varphi + 3$

   $\varphi^6 = 8\varphi + 5$

   $\varphi^7 = 13\varphi + 8$

9. a) Tölurnar x og y í jöfnunni $\varphi^n = x \cdot \varphi + y$ eru Fibonacci-tölur.

   b) Skoðum mynstrið í

   $\varphi^2 = 1\varphi + 1$

   $\varphi^3 = 2\varphi + 1$

   $\varphi^4 = 3\varphi + 2$

   $\varphi^5 = 5\varphi + 3$

   $\varphi^6 = 8\varphi + 5$

   $\varphi^7 = 13\varphi + 8$

Sé rýnt nánar í útreikningana í 8. dæmi sést að í hverri nýrri jöfnu eru stuðlar við φ úr síðustu tveimur jöfnum lagðir saman, á svipaðan hátt og Fibonacci-runan er mynduð. Við samanburð við Fibonacci-rununa

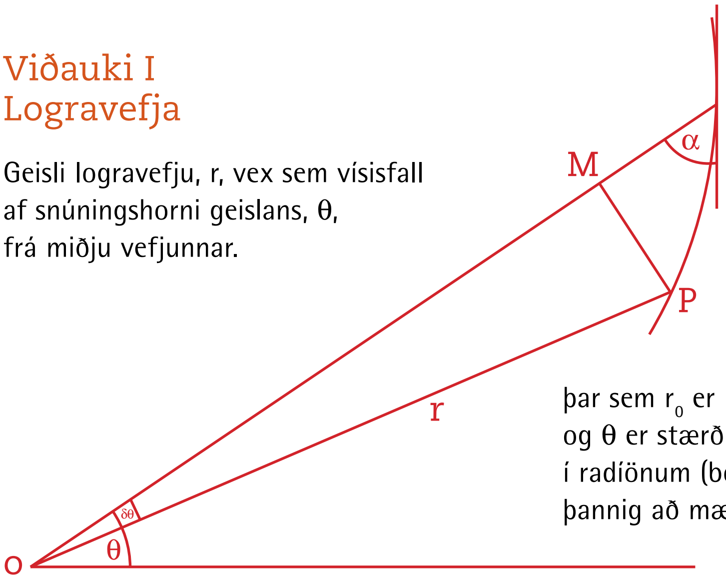
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

má sjá að $\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1}$

þar sem F_n er n-ti liður í Fibonacci-rununni.

Viðauki I
Logravefja

Geisli logravefju, r, vex sem vísisfall af snúningshorni geislans, θ, frá miðju vefjunnar.



Það má rita:

$$r = r_0 k^{\theta}$$

þar sem r_0 er upphaflega lengd geislans og θ er stærð hornsins talið frá r_0, mælt í radíönum (bogalengd einingarhrings, þannig að mælitala heils hrings er 2π).

Fastinn k í jöfnunni $r = r_0 k^{\theta}$ er fall af horninu α. Hann stjórnar því hve hratt geislinn vex.

Einnig mætti rita jöfnu r þannig:

$r = r_0 e^{\theta/\tan\alpha}$

Með því að bera jöfnurnar tvær saman fæst að $k^{\theta} = e^{\theta/\tan\alpha}$

Þá er $k = e^{1/\tan\alpha}$

Á hinn bóginn vitum við að þegar vefjan hefur snúist heilan hring er hlutfall geisla hennar r_1, við upphaflega geislann r_0, $\frac{r_1}{r_0} = k^{2\pi} = \varphi^4$, þ.e. geisli vefjunnar stefnir á að margfaldast með

φ^4 á einum hring sem er 2π mælt í radíönum.

Gildi k í vefju gullna rétthyrningsins stefnir þá á $k = \varphi^{(4/2\pi)} \approx 1{,}358$.

Hornið α er þá u.þ.b. 73°.

Viðauki II

Dæmi 4 og 5 á bls. 15:

4. a) $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1 \approx 0{,}618$

   b) $\frac{1}{\varphi} + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}-1+2}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi \approx 1{,}618$

5. a) $\varphi^2 - 1 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}-4}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

   b) $\frac{1}{\varphi - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1-1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} = \varphi \approx 1{,}618$

Viðauki III

8. a) $\varphi^4 = \varphi^3 \cdot \varphi = (2\varphi + 1) \cdot \varphi = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2$

   b) $\varphi^5 = \varphi^4 \cdot \varphi = (3\varphi + 2) \cdot \varphi = 3\varphi^2 + 2\varphi = 3(\varphi + 1) + 2\varphi = 5\varphi + 3$

   $\varphi^6 = \varphi^5 \cdot \varphi = (5\varphi + 3) \cdot \varphi = 5\varphi^2 + 3\varphi = 5(\varphi + 1) + 3\varphi = 8\varphi + 5$

   $\varphi^7 = \varphi^6 \cdot \varphi = (8\varphi + 5) \cdot \varphi = 8\varphi^2 + 5\varphi = 8(\varphi + 1) + 5\varphi = 13\varphi + 8$