

UPPRIFJUNARÁFANGAR FRAMHALDSSKÓLA Í STÆRÐFRÆÐI: SKAPANDI OG KREFJANDI VINNA EÐA STAGL?

Í greininni eru könnuð viðhorf framhaldsskólakennara til viðfangsefna er lúta að gagnrýninni og skapandi hugsun í upprifjunaráföngum í stærðfræði. Byggt er á viðtalsrannsókn þar sem fimm kennarar úr þremur framhaldsskólum tóku þátt. Tekin voru viðtöl bæði áður en og eftir að kennararnir lögðu verkefni fyrir nemendur í upprifjunaráföngum, þar sem beita þurftu gagnrýninni og skapandi hugsun við lausnaleit. Kennsluáætlanir áfanga voru einnig greindar. Niðurstöðurnar benda til þess að viðhorf kennaranna til slíkra viðfangsefna séu almennt jákvæð. Tillögur komu fram um það hvernig slíkt efni mætti tvíanna við annars konar verkefni en skiptar skoðanir voru um sýnidæmi og lausnir í stærðfræðinámi. Í aðalnámskrá framhaldsskóla er lögð áhersla á að nemendur öðlist hæfni í stærðfræðilegri hugsun og röksemdafærslu. Vísbendingar eru um að skortur sé á viðfangsefnum í stærðfræðinámsfni fyrir nemendur í upprifjunaráföngum framhaldsskóla sem reyna á þá hæfni.

Efnisorð: stærðfræðimenntun, upprifjunaráfangi, framhaldsskóli, stærðfræðiverkefni, gagnrýnin hugsun

INNGANGUR

Það skiptir miklu máli hvers konar viðfangsefni nemendur fást við og hvernig vinnubrögð þeir læra í skólastarfi. Í stærðfræðihluta aðalnámskrár framhaldsskóla er aukin krafa um að nemendur öðlist hæfni í stærðfræðilegri, gagnrýninni og skapandi hugsun (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2012). Það er nauðsynlegur hæfileiki til að geta tekist á við áskoranir 21. aldar þar sem störf munu krefjast útsjónarsemi og sköpunargáfu frekar en hæfni í að fylgja leiðbeiningum á vélrænan hátt. Mikilvægt er því að nemendur takist á við viðfangsefni í námi sínu sem reyna á þessa þætti.

Markmið þessarar rannsóknar er að varpa ljósi á viðhorf framhaldsskólakennara til þess hvort viðfangsefni sem beita þarf gagnrýninni og skapandi hugsun við að leysa henti nemendum í upprifjunaráföngum. Einnig er kannað hvort kennarar telji nemendur í þessum áföngum hafa forsendur til að öðlast stærðfræðilega hæfni með því að glíma við

slík verkefni.¹ Niðurstöðurnar geta haft hagnýtt gildi við þróun námsefnis í framtíðinni. Rannsóknarspurningin er: Hver eru viðhorf íslenskra stærðfræðikennara til þess að nota viðfangsefni sem reyna á gagnrýna og skapandi hugsun í kennslu nemenda í upprifjunar-áföngum?

FRÆÐILEGUR BAKGRUNNUR

Hér er fjallað um stöðu stærðfræðináms í framhaldsskólum á Íslandi og kenningar um hugmyndir kennara og nemenda um stærðfræðináms. Leiðarvísir fyrir greiningu stærðfræðilegra viðfangsefna er útskýrður, fjallað um stærðfræðiskilning og hvernig nemendur byggja upp hæfni í stærðfræðilegri hugsun.

Um stærðfræðináms á framhaldsskólastigi á Íslandi

Árið 2014 var gerð úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum á vegum mennta- og menningarmálaráðuneytisins. Í niðurstöðum úttektarinnar kemur fram að margt sé vel gert en ýmislegt megi þó laga. Almennum markmiðum þurfi að gera hærra undir höfði, svo sem hvað varðar stærðfræðilega hugsun, röksemdafærslur og lausnir þrauta. Kröfur um mikla yfirferð efnisatriða standi gegn því að keppt sé að almennum markmiðum og skortur sé á vönduðu kennsluefni. Í tillögum til úrbóta er meðal annars lagt til að „endurskoða frá grunni námsefni í stærðfræði á þeim námsbrautum framhaldsskólans sem innihalda litla stærðfræði og samræma það lokamarkmiðum þeirra“. Þá telja höfundar úttektarinnar æskilegt að koma á fót ritstýrðum vef með kennsluefni sem notendur leggi inn. Þann vef væri hægt að reka í tengslum við samskiptavef fyrir stærðfræðikennara. Þannig væri hægt að efla samstarf kennara við nýtingu á fjölbreyttum viðfangsefnum sem reyna á skilning og hæfni til að beita stærðfræði (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014).

Í úttektinni segir einnig að mikil áhersla sé á einstök efnisatriði og þjálfun í beitingu staðlaðra reikniaðferða. Svokölluð stagl-verkefni (e. drill), sem gjarnan byggja á sýndæmum sem hönnuð eru til að sýna aðferð við að leysa tiltekna gerð verkefna, þykja almennt ekki gefa nemendum tækifæri til náms við hæfi (Boaler, 2011). Þegar nemendur leysa verkefni með það að markmiði að æfa ákveðna reglu læra þeir gjarnan aðferðir við að leysa dæmi án þess að skilja hvers vegna þær virka við lausn tiltekinnar verkefna eða hvernig þær tengjast öðrum stærðfræðilegum hugmyndum. Þetta ýtir ekki undir gagnrýna eða skapandi hugsun nemenda og er í andstöðu við breyttar áherslur á merkingarþær viðfangsefni í stærðfræðinámi þar sem lykilaatriðið er lausnarferlið fremur en niðurstaðan (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2012; Skott, 2004).

Í aðalnámskrá framhaldsskóla 1999 var sérstakur stærðfræðihluti sem hafði að geyma ítarlegar áfangalýsingar fyrir 16 áfanga (Menntamálaráðuneytið, 1999). Í aðalnámskránni frá 2011 er þetta breytt. Þar er gerð áfangalýsinga falin skólunum (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2012). Það leiðir til þess að skólar hafa meira vald yfir inntaki áfanganna. Þannig getur auðveldlega skapast munur milli skóla á því hvaða efnisþættir eru teknir fyrir og hvernig þeim er raðað niður á áfanga. Þar sem áfangar geta orðið ólíkir skapast þörf fyrir fjölbreyttara og sveigjanlegra námsefni en verið hefur (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014).

Upprifjunaráfangar eru hannaðir fyrir nemendur sem ekki hafa náð námsmarkmiðum grunnskólans í tiltekinni námsgrein til að geta haldið áfram námi sínu. Þessir áfangar hafa verið kallaðir núlláfangar því þeir hafa í gegnum tíðina ekki gefið einingar. Í núverandi áfangakerfi teljast upprifjunaráfangar til fyrsta þreps og teljast til eininga þess þreps. Í eðli sínu byggir inntak upprifjunaráfanga töluvert á bæði námskrá grunnskóla og framhaldsskóla. Áfangarnir eru skipulagðir í samræmi við þær kröfur sem skólarnir gera til hæfni nemenda á öðru þrepi hverrar námsgreinar. Inntak áfangans endurspeglar eðlilega þær kröfur.

Upprifjunaráfangar hafa einir og sér ekki verið sérstaklega mikið rannsakaðir hér á landi. Í bakkaláritgerð annars höfundar þessarar greinar bentu niðurstöður til þess að við laus viðfangsefna sem notuð eru í upprifjunaráföngum þurfi nemendur sjaldan að beita mikilli stærðfræðilegri hugsun. Áhersla á afmörkuð námsmarkmið sé á kostnað almennari markmiða aðalnámskrár (Jóhann Örn Sigurjónsson, 2014). Í niðurstöðum rannsóknar á hægferðaráföngum í stærðfræði kemur fram að nota þurfi opin verkefni til að þjóna ólíkum þörfum nemenda, þó breytt hlutverk kennarans frá því sem hefðbundið er geti verið vandasamt fyrir bæði kennara og nemendur að venjast (Kristín Bjarnadóttir, 2011). Í nýlegri íslenskrri rannsókn á stærðfræðikennurum á elsta stigi grunnskóla litu flestir kennarar á sköpun og stærðfræði nokkurn veginn sem aðskilin fyrirbæri. Opin verkefni sem þeir leituðu í voru hagnýt fremur en krefjandi á stærðfræðilega hugsun (Guðbjörg Pálsdóttir og Sriraman, 2017). Í starfsháttarannsókn á grunnskólum var komist að þeirri niðurstöðu að unglingar fái ekki næg tækifæri til að glíma við heildstæð og krefjandi viðfangsefni sem reyna á samstarfshæfni, sjálfstæð vinnubrögð og sköpun (Ingvar Sigurgeirsson, Amalía Björnsdóttir, Gunnhildur Óskarsdóttir og Kristín Jónsdóttir, 2014).

Í nýlegri rannsókn á notkun stærðfræðikennslubóka í framhaldsskólum í Finnlandi kom fram að kennarar fylgja efnistöfum námsbókanna og nota sýnidæmi úr þeim til að útskýra það efni sem nemendur eiga að glíma við (Viholainen, Partanen, Piironen, Asikainen og Hirvonen, 2015). Þær niðurstöður virðast vera í samræmi við kennsluhætti í dæmi-gerðri kennslustund héraendis, miðað við úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum frá 2014. Þar segir jafnframt að margir kennarar nýti sér tölvugert efni í innlögnum (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014). Í norskrri rannsókn kom fram að þar sem rafrænt námsefni er notað er mun meiri breidd í því hvert kennarar sækja efni sem þeir nýta. Þá er það bæði úr gömlum og nýjum kennslubókum sem og rafrænu efni á netinu (Grave og Pepin, 2015).

Á Íslandi hefur ekki verið rannsakað hvers konar viðfangsefni henta nemendum sem hafa átt erfitt uppdráttar í stærðfræðinámi sínu. Í rannsóknnum Solomon kom fram að nemendur sem eiga í erfiðleikum með stærðfræðinámi eiga oft í vandræðum með að skilja fræðilega framsetningu og orðalag á námsefni í stærðfræði. Ef verkefni eru sett þannig fram að þeir geti tengt þau við eigin reynsluheim reynist þeim auðveldara að takast á við þau (Solomon, 2009). Ef til vill þurfa nemendur upprifjunaráfanga sérstaklega á skapandi og opnum viðfangsefnum að halda til þess að öðlast sjálfstraust og hugrekki til að takast á við stærðfræðilegt efni.

Hugarfar nemenda og viðhorf kennara til stærðfræðináms

Lykillinn að frjóum umræðum er talinn vera fáar en krefjandi spurningar sem ekki er endilega til eitt rétt svar við (Good og Brophy, 2008; Henning, 2008). Mikilvægt er að nemendum verði töm sú staðreynd að í stærðfræði sem og öðrum greinum er það yfirleitt ekki svarið sjálft sem skiptir máli heldur hvernig það er rökstutt. Áhersla á ferlið er því mikilvægari en niðurstaðan (Skott, 2004). Rannsóknir gefa til kynna að í íslenskum grunnskólum sé lítið um samræður í stærðfræði en nemendur vinni fyrst og fremst hver fyrir sig í bækur sínar (Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir, 2015; Savola 2010). Frjóar umræður sem byggja á rökræðum um opnar spurningar virðast ekki algengar í stærðfræðikennslu á Íslandi.

Það hvernig kennarinn spyr spurninga hefur óneitanlega áhrif á hugmyndir nemenda um hlutverk sitt og eðli námsgreinarinnar. Hugmyndirnar, viðmiðin og gildin sem umlykja hið félagslega umhverfi skólastofunnar hafa áhrif á það hvernig nemendur líta á stærðfræði sem fræðigrein og sig sjálfa sem iðkendur hennar (Cobb og Yackel, 1996). Hugmyndafræðin um að lyklatríði árangurs í námi sé að nemendur öðlist þá trú að hæfileikar séu almennt ekki meðfæddir heldur áunnir hefur fengið byr undir báða vængi á undanförunum árum, ekki síst í stærðfræði (Boaler, 2016). Nemendur sem þróa með sér vaxtarsjálíf (e. growth mindset) kunna að meta áskoranir og telja að hæfileika sína sé hægt að þróa og byggja upp. Nemendur með slíkt hugarfar sýna oft betri námsárangur en nemendur með festusjálíf (e. fixed mindset), en þeir trú á því að hæfileikar á tilteknu sviði séu fast fyrirbæri sem þeir geti ekki haft áhrif á (Yeager og Dweck, 2012). Í langtímarannsókn Blackwells, Trzesniewskis og Dwecks (2007) var námsárangur 13–14 ára stærðfræðinemenda með vaxtarsjálíf annars vegar og festusjálíf hins vegar borinn saman. Upphaflega mældist ekki marktækur munur en með tímanum dró verulega í sundur í námsárangri þeirra, nemendum með vaxtarsjálíf í vil. Á þessu aldurskeiði virðast nemendur þurfa að byggja upp traust á eigin getu til að þróa með sér stærðfræðihæfni.

Til að geta beitt stærðfræðilegum rökstuðningi er ekki nóg að hafa rétt hugarfar heldur þarf einnig færni í óhlutbundinni hugsun. Óhlutbundin hugsun (e. abstract thinking) er eiginleiki sem felur meðal annars í sér að geta séð fyrir sér lausnir í huganum og kemur fram á síðasta stigi vitsmunalegs þroska. Börn komast á það stig allt frá 11 ára aldri en sumir ekki fyrr en við 15–20 ára aldur (Piaget, 1964). Gera má því ráð fyrir að einhverjir nemendur í upprifjunaráföngum hafi ekki þróað með sér slíka hugsun. Arnett bendir raunar á að ekki komist allar manneskjur í öllum samfélögum á þetta stig og fæstir noti óhlutbundna hugsun mikið í daglegu lífi (Arnett, 2013). Í verkefnum þar sem beita þarf óhlutbundinni hugsun við að skilja stærðfræðileg fyrirbæri þarf því að hafa ólíkar forsendur nemenda í huga.

Eðli viðfangsefna í stærðfræðinámi og kennslu

Fimm meginatriði einkenna stærðfræðikennslu sem stuðlar að því að nemendur þrói með sér skilning á stærðfræði. Eitt af þeim atriðum er eðli viðfangsefnanna. Hin eru hlutverk kennarans, námsgsamfélagið, fjölbreytt námsgögn og jafnræði (Hiebert o.fl., 1997). Í þessari rannsókn var athyglinni helst beint að eðli viðfangsefnanna og hlutverki kennarans.

Viðfangsefni í stærðfræði (e. mathematical tasks) hafa verið flokkuð niður á ólíkan hátt. Viðfangsefni er hér skilgreint sem hluti tiltekins atburðar í kennslustund sem tileinkaður er þróun á tiltekinni stærðfræðilegri hugmynd (Stein og Smith, 1998). Þannig geta verið mörg reikningsdæmi í einu viðfangsefni og fleiri en eitt viðfangsefni í einu verkefni. Tilgangur viðfangsefna er að koma af stað stærðfræðilegri virkni sem leiðir til breytinga á því hvað nemendur eru næmir á að taka eftir og færir um að leysa (Mason og Johnston-Wilder, 2006).

Til eru mismunandi viðmið um flokkun ólíkra gerða viðfangsefna. Viðmið sem Stein og Smith settu upprunalega fram voru nýtt í þessari rannsókn. Þær flokkuðu viðfangsefni eftir því hversu mikillar hugsunar er krafist af nemendum við úrlausn þeirra (Stein, Smith, Henningsen og Silver, 2009). Um er að ræða leiðarvísi fyrir kennara til að greina hvernig þeir setja stærðfræðileg viðfangsefni fram í kennslustundum. Í leiðarvísinum er viðfangsefnum skipt í fjóra undirflokkar af tveimur gerðum eftir því hvort það krefst mikillar eða lítillar greinandi hugsunar að leysa þau. Aðeins er sagt til um hvernig viðfangsefni birtast í námsefni og hvernig þau eru sett fram af kennurum en ekki er tekið tillit til þess hvernig þau eru túlkuð af nemendum (Stein og Smith, 1998).

Tafla 1. Flokkar viðfangsefna þar sem gerðar eru litlar kröfur til nemenda

Að leggja á minnið	Nemendur þurfa að kalla fram áður lærdar staðreyndir, reglur, formúlur eða skilgreiningar sem þeir hafa lagt á minnið. Tímatakmarkanir koma í veg fyrir að hægt sé að leiða sig að svári. Viðfangsefni kemur ekki á óvart, endursköpun á áður séðu efni, það sem gera skal er alveg skýrt. Tengingu skortir milli stærðfræðilegra hugtaka og undirliggjandi merkingar.
Aðferðir án tengsla	Af fyrri reynslu, kennslu eða staðsetningu í námsefni er augljóst hvaða aðferð á að nota til að leysa viðfangsefnið. Ljóst er hvað á að gera og hvernig en ekki hvers vegna. Ekki er gerð krafa um greinandi hugsun. Engin tengsl eru við hugtök og merkingu sem liggja að baki aðferðinni sem er notuð. Frekar er einblínt á að komast að rétttri niðurstöðu en að þróa skilning. Ekki er krafist útskýringa eða þær snúast aðeins um aðferðina sem notuð var. (Stein o.fl., 2009, bls. 6, íslensk þýðing greinarhöfunda)

Tafla 2. Flokkar viðfangsefna þar sem gerðar eru miklar kröfur til nemenda

Aðferðir með tengslum	<p>Sjónum nemenda er beint að tilgangi aðferðanna til þess að þeir öðlist dýpri skilning á stærðfræðilegum hugtökum og hugmyndum. Í viðfangsefninu er lögð til ákveðin lausnaleið, beint eða óbeint, sem felst í almennum aðferðum náskyldum undirliggjandi hugmyndum. Þó almennum aðferðum sé fylgt eftir er þeim ekki fylgt án umhugsunar.</p> <p>Viðfangsefnið er gjarnan sett fram á ólíka vegu, til dæmis myndrænt eða táknrænt, þar sem tenging á milli mismunandi framsetninga hjálpar til við að þróa skilning.</p> <p>Glíma þarf við undirliggjandi hugmyndir aðferðarinnar á viðunandi hátt til að þróa skilning. Beita þarf greinandi hugsun að einhverju marki.</p>
Að iðka stærðfræði	<p>Beita þarf greinandi hugsun. Hvorki ákveðin aðferð né lausnaleið er lögð til.</p> <p>Nemendur þurfa að kanna og skilja eðli stærðfræðilegra hugtaka, aðferða og tenginga.</p> <p>Þess er krafist að nemendur bæði skrái og fylgist með eigin hugsaniferli.</p> <p>Þekkingu og reynslu þarf að nota á viðeigandi hátt við að leysa viðfangsefnið.</p> <p>Greina þarf upp á eigin spýtur hvað skal gera og sjá hvernig forsendur takmarka mögulegar lausnir og lausnaleiðir.</p> <p>Úrlausn krefst töluverðrar hugsunar. Vegna þess hversu ófyrirsjáanleg lausnaleiðin er getur það valdið óvissu nemenda. (Stein o.fl., 2009, bls. 6, íslensk þýðing greinarhöfunda)</p>

Í rannsókn Steins og Smiths (1998) sem leiðarvísirinn var þróaður út frá voru helstu niðurstöðurnar annars vegar þær að krefjandi viðfangsefni sem beita þarf greinandi hugsun við að leysa voru þau sem erfiðast var að vinna með í skólastofunni. Kennarar settu þau því gjarnan í auðveldari búning þegar í skólastofuna var komið. Hins vegar kom í ljós að námsárangur var meiri í skólastofum þar sem beita þurfti greinandi hugsun og röksemdafærslu við lausn á viðfangsefnum en þar sem þess þurfti ekki. Samhliða því kom fram að námsárangur var minnstur þar sem áhersla var á að nota fyrirfram gefnar aðferðir við úrlausnir (Stein o.fl., 2009).

Rannsóknir Wangs o.fl. (2013) benda til þess að það hafi jákvæð áhrif á námsárangur nemenda á yngri stigum að glíma við viðfangsefni þar sem gerðar eru miklar kröfur til þeirra. Þessar niðurstöður eru í samræmi við rannsóknir Boalers (1999, 2011, 2016) sem hefur sýnt fram á að nemendur sem fást við opin verkefni þar sem beita þarf greinandi og skapandi hugsun ná góðum árangri í stærðfræði og standa framar þeim sem vanist hafa því að vinna samkvæmt forskrift kennara. Vandinn er sá að það krefst bæði mikillar stærðfræðilegrar og kennslufræðilegrar þekkingar að geta notað slík viðfangsefni í kennslu.

Fagþekking kennara hefur verulega mikil áhrif á það hvernig þeir gera kröfur til hugsunar nemenda í þannig vinnu (Wilhelm, 2014). Það hefur verið talið nauðsynlegt að kennarar þjálf sig í að leggja fyrir slík viðfangsefni og stuðli þannig að því að nemendur beiti greinandi hugsun til að dýpka skilning sinn á stærðfræðihugtökum (Norton og Kastberg, 2012). Tímaskortur, aðgengi að aðstoð og hjálpargögnum ásamt fyrri árangri nemenda eru dæmi um breytur sem taldar eru hafa mikil áhrif á það hvernig kennarar nýta slík verkefni (Foley, Khoshaim, Alsaeed og Nihan Er, 2012).

Lítillar greinandi hugsunar krafist

- Reiknaðu 12×15
- Hvert er flatarmál rétthyrnings með hliðarlengdir 4 cm og 6 cm?

Mikillar greinandi hugsunar krafist

- Útskýrðu með teikningu eða eigin orðum hvernig þú reiknar 12×15 í huganum
- Hversu marga ólíka rétthyrninga er hægt að búa til með flatarmálið 24 cm^2 ?
En 13 cm^2 ?

Mynd. Dæmi um ólík viðfangsefni eftir því hvort lítillar eða mikillar greinandi hugsunar er krafist

Mismunandi tegundir stærðfræðiskilnings

Í seinni tíð hefur á fræðasviði stærðfræðimenntunar verið lögð meiri áhersla á að nemendur byggji upp skilning á stærðfræði en að þeir leggi reikniaðferðir á minnið. Skilning er erfitt að skilgreina nákvæmlega enda hægara sagt en gert að draga línuna milli þess að skilja og skilja ekki. Skilningur er flókinn eiginleiki sem er miklum breytingum háður (Hiebert o.fl., 1997).

Skemp (1976) lagði til tvær mismunandi leiðir til að túlka merkingu þess að skilja stærðfræðilega hugmynd: venslaskilning (e. relational understanding) og tækniskilning (e. instrumental understanding). Venslaskilningur felst í því að vita hvað skal gera þegar tekist er á við viðfangsefni og sér í lagi hvers vegna. Tækniskilningur (einnig nefnt „reglur án ástæðna“) merkir að skilningur þýði að hafa reglu, formúlu eða aðferð til taks og getuna til að nota hana en ekki vita hvers vegna hún virkar. Mason og Johnston-Wilder (2006) lýsa því hvernig nemendur í samþykkisham (e. accepting mode) geta í besta falli öðlast tækniskilning en þar eru þeir í hlutverki þiggjanda í námi sínu. Nemendur í frumkvæðisham (e. asserting mode) eru líklegri til að öðlast venslaskilning því þeir taka áhættu, leggja fram tilgátur og læra af mistökum sínum við lausnir verkefna.

Hugmyndir Skemps um tækniskilning og venslaskilning og síðan leiðarvísir Steins og Smiths eru líkt og tvær hliðar á sama peningi. Þar sem Skemp gerir ráð fyrir tvískiptingu á eðli skilnings nemenda beina Stein og Smith sjónum að því hvernig eðli viðfangsefna hefur áhrif á það hvers konar skilning nemendur þróa með sér. Þar hefur námsefnið og

framsetning þess í kennsluferlinu áhrif. Það er hárfín lína milli þess að sjá hvernig stærðfræðihugtök tengjast og byggja hvert á öðru og að líta á þau sem aðskildar einingar af þekkingu. Þessi lína birtist með skýrum hætti í leiðarvísi Steins og Smiths.

Þessi tvíhyggja um ólíkt eðli skilnings birtist einnig í hugtökunum hugtakaskilningur (e. conceptual understanding) og aðferðaskilningur (e. procedural understanding). Þessi hugtök hafa sams konar merkingu og venslaskilningur og tækniskilningur (Hiebert og Carpenter, 1992). Sambandið milli tækniskilnings og venslaskilnings er raunar meðal elstu ágreiningsefna á sviði stærðfræðimenntunar (Resnick og Ford, 1981). Í nýlegri samantekt á rannsóknum um þetta samband kemur fram að þó að námskrárþróun hafi gjarnan verið í þá átt að venslaskilningur eigi að koma á undan og stuðla að tækniskilningi þá sé sambandið þar á milli flóknara en svo. Tækniskilningur stuðli að sama skapi að þróun venslaskilnings og rannsóknir skorti á þeim fjölbreyttu leiðum sem hægt er að fara í átt að aukinni hæfni í stærðfræði í þessu sambandi (Rittle-Johnson, Schneider og Star, 2015).

Þótt námsefni sé sett fram með það að markmiði að nemendur öðlist venslaskilning tryggir það ekki að virkinn í skólastofunni verði af því tagi. Hugarfar og nálgun kennarans er talið ráða meiru um það hvort áhersla sé á venslaskilning eða tækniskilning en eðli viðfangsefnanna (Skemp, 1976). Í niðurstöðum Peseks og Kirshners mældist ekki marktækur munur milli hópa sem hlutu annars vegar kennslu með áherslu á tækniskilning á undan venslaskilningi og hins vegar hóps þar sem einungis var lögð áhersla á venslaskilning (Pesek og Kirshner, 2000). Nemendur sem vanir eru kennslu með áherslu á tækniskilning hafa tilhneigingu til að vilja nálgast námið á þann hátt þó að kennslan sé meira í ætt við venslaskilning. Þá hafa rannsóknir bent til þess að nemendur í hópum þar sem kennsla er í ætt við venslaskilning eigi auðveldara með að beita stærðfræðiþekkingu sinni við raunverulegar aðstæður og hugsa á sveigjanlegan hátt við úrlausn verkefna en þeir sem ekki hafa vanist því (Boaler, 1999).

Oft einfalda kennarar verkefni þannig að minna reynir á krefjandi hugsanaferli en upphaflega var gert ráð fyrir (Henningsen og Stein, 1997). Stigler og Hiebert (1999) telja að í raun skipti viðfangsefnin sjálf ekki mestu máli heldur það hvernig þau eru sett fram af kennurum. Niðurstöður rannsókna Kilpatricks, Swaffords og Findells (2001) benda til þess að kennarar með litla menntun hafi tilhneigingu til að minnka kröfur til nemenda. Hæfni kennarans til þess að útfæra verkefni á þann hátt að þau reyni á gagnrýna hugsun nemenda er lyklatríði í stærðfræðikennslu.

Um síðustu aldamót lét danska menntamálaráðuneytið útbúa skýrslu um það að hve miklu leyti þyrfti að endurskoða stærðfræðimenntun þar í landi og hvers konar stærðfræðihæfni þyrfti að efla meðal nemenda á hinum ýmsu skólastigum. Skýrslan er oft nefnd KOM-skýrslan og var margt í henni talið eiga vel við íslenskar aðstæður (Kristín Bjarnadóttir, 2011). Í KOM-skýrslunni er hæfni til að útfæra verkefni samkvæmt þörfum nemenda skilgreind sem hæfni kennarans til sjálfrar kennslunnar. Það skiptir máli að geta afhjúpað og túlkað hvernig skilningur hvers nemanda birtist í kennslustundum. Til að þróa kennsluhæfni sína er mikilvægt að vinna með öðrum að sama markmiði, að endurmeta kennslu sína og bæta við þekkingu sína (Niss og Jensen, 2002).

AÐFERÐ

Rannsóknin er tilviksrannsókn (Mertens, 2010) með það að markmiði að varpa ljósi á viðhorf framhaldsskólakennara til þess hvort viðfangsefni, þar sem reynir á gagnrýna og skapandi hugsun við lausn, henti nemendum í upprifjunaráföngum. Til skoðunar var fyrirkomulag upprifjunaráfanga sem þátttakendurnir kenna, sýn þeirra á ólíkar gerðir viðfangsefna og vægi sýnidæma og lausna í stærðfræðinámi.

Þátttakendur

Þátttakendur voru fimm kennarar í þremur mismunandi framhaldsskólum sem kenna upprifjunaráfanga í stærðfræði. Tveir skólar voru af höfuðborgarsvæðinu en einn utan þess. Þrjár konur og tveir karlar tóku þátt.

Þátttakendurnir voru valdir með dæmigerðu tilviksúrtaki (e. typical case sampling). Þannig var tryggt að í skólunum í úrtakinu væru kenndir upprifjunaráfangar áður en þátttakendur voru valdir. Haft var samband við sex skóla með tölvupósti um þátttöku í rannsókninni og svöruðu þrír. Skrifstofur skólanna vísuðu á kennarana. Þátttakendur veittu samþykki sitt til þátttöku í rannsókninni, bæði skriflega í tölvupósti og munnlega við uppahaf viðtalanna. Gervinöfn voru búin til fyrir þátttakendur og skóla þeirra.

Í Klukkuskóla tóku þrír kennarar þátt: Arna, Birta og Kristinn. Arna hefur yfir 30 ára kennsluferil að baki sem bæði grunnskóla- og framhaldsskólakennari. Birta hefur um 15 ára reynslu sem stærðfræðikennari í grunn- og framhaldsskóla. Kristinn hefur um fimm ára kennslureynslu en hann hefur nær eingöngu kennt stærðfræði á framhaldsskólastigi. Friðrik er þátttakandinn úr Mjallarskóla. Hann hefur svipaða kennslureynslu og Kristinn og hefur að mestu leyti kennt stærðfræði. Íris nefnist þátttakandinn í Stangarskóla. Hún hefur þriggja ára kennslureynslu, kennir aðallega viðskiptagreinar, en upprifjunaráfangann í stærðfræði er hún að kenna í fimmta skipti. Af öllum þátttakendum hefur hún minnstan bakgrunn í kennslufræði stærðfræði.

Gagnaöflun

Rannsóknin var gerð í nóvember 2015. Gagna var aflað með greiningu kennsluáætlanu í viðkomandi skólum, fyrirlögn verkefnablaða og tveimur umferðum af viðtölum. Í Klukkuskóla voru viðtöl tekin við alla þrjá kennarana samtímis en að öðru leyti var um einstaklingsviðtöl að ræða. Viðtölin voru hálfopin með hliðsjón af spurningalista² (Mertens, 2010). Lengd viðtalanna var 30–60 mínútur og voru þau hljóðrituð.

Þátttakendurnir lögðu verkefnablöð fyrir nemendum sem samin voru af öðrum rannsakanda.³ Inntakið í verkefnablöðunum var skilningur á jafnaðarmerkinu, hlutleysum og andhverfum. Þátttakendum voru ekki kynnt fræðilegu hugtökin um venslaskilning sem stefnt var að umfram tækniskilning en fengu skriflegar ábendingar fyrirfram með kennslu-tillögum og ábendingum um hvernig leggja mætti viðfangsefnið fyrir.

Fyrri viðtölin voru tekin einni til tveimur vikum áður en verkefnablöðin voru lögð fyrir. Í þeim voru þátttakendurnir spurðir þeirrar opnu spurningar hvað þeim þætti einkenna gott námsefni í stærðfræði, hvers konar viðfangsefni þeir myndu vilja sjá í nýju námsefni fyrir upprifjunaráfanga og um skoðanir þeirra á gildi sýnidæma og lausna í stærðfræðinámi.

Seinni viðtölin voru öll tekin strax eftir síðustu kennslustund með verkefnablöðunum. Þar var megináherslan á viðhorf þátttakenda til krefjandi viðfangsefna fyrir nemendur í upprifjunaráföngum og hvort nemendur hefðu haft forsendur til að leysa verkefnin sem lögð voru fyrir þá.

Greining gagna

Við gagnagreiningu var mest stuðst við viðtölin. Upptökurnar af þeim voru skráðar nákvæmlega eftir á og gögn flokkuð eftir spurningum. Þannig gafst einnig tækifæri til þess að rýna nánar í gögnin, skrá athugasemdir og tengja við fræði. Loks voru skilgreind þrjú þemu til að varpa ljósi á niðurstöðurnar í samhengi við rannsóknarspurninguna. Kennsluáætlanir voru einnig greindar til að skilja viðhorf þátttakendanna til náms og kennslu út frá fyrirkomulagi áfanga þeirra.

Siðferðileg atriði og áreiðanleiki

Allar persónugreinanlegar upplýsingar í niðurstöðum voru gerðar órekjanlegar með gervinöfnum. Þátttakendum var gerð grein fyrir því að hljóðrit viðtalanna yrðu aldrei birt og að gögnum yrði eytt að rannsókn lokinni. Rannsóknin var tilkynnt til Persónuverndar.

Einhver munur var á því hvernig þátttakendur kynntu verkefnablöðin fyrir nemendum. Enginn lét þau vega í námsmati en sumir gerðu þau samt að skilaverkefni. Það getur hugsanlega haft áhrif á það hversu mikið nemendur lögðu sig fram við verkefnið, þar sem það gildi ekkert inn í lokaeinkunn. Sumir nemendur komust að því í lok tímans að um skilaverkefni hefði verið að ræða og sögðust hefðu vandað sig betur ef þeir hefðu vitað það fyrirfram. Þetta er þó ekki talið hafa haft mikil áhrif á réttmæti rannsóknarinnar þar sem hún beinist aðallega að viðhorfum kennara til eðlis viðfangsefnanna en ekki sjálfum úrlausnum nemenda.

NIÐURSTÖÐUR

Fyrsta þemað sem fjallað er um er fyrirkomulag upprifjunaráfanga í hverjum skóla. Síðan er greint frá sýn þátttakendanna á gildi sýnidæma og lausna á ólíkum viðfangsefnum. Loks er greint frá því hvort þátttakendurnir telji að viðfangsefni þar sem beita þarf gagnrýninni og skapandi hugsun henti þessum hópi nemenda.

Fyrirkomulag áfanganna: Efnisþættir, námsefni og námsmat

Í kennsluáætlunum áfanganna í skólunum þremur voru greindar upplýsingar um efnisþætti, námsefni og námsmat til einkunnar. Auk þess má nefna að í öllum skólunum voru upprifjunaráfangarnir skipulagðir yfir heila önn, tímabil sem spannar um 16–20 vikur. Áfangarnir voru alls staðar hugsaðir sem upprifjun á undirstöðuatriðum grunnskóla-stærðfræði og voru efnisþættir því svipaðir. Í kennsluáætlunum birtast þó ólíkar áherslur í námsmati auk einhverra blæbrigða í efnisþáttum.

Í Klukkuskóla er áfanganum skipt niður í þrjár lotur. Nemendur skólans hafa alltaf far-tölvur til taks. Ekki eru notaðar bækur heldur frumsaminn námsvefur og annað stafrænt

efni á borð við *GeoGebra*, *Desmos* og *Khan Academy*. Því má segja að stafrænt námsefni vegi töluvert þungt í Klukkuskóla. Að sögn kennaranna er markmiðið með stafræna efninu að kveikja áhuga nemenda, virkja þá og leiða í ljós hvernig stærðfræðikunnátta er hagnýt. Loturnar þrjár gilda jafnt til einkunnar og inniheldur hver þeirra bæði könnun og skiladæmi. Í Klukkuskóla gilda kannanir alls 34%, skiladæmi 27%, GeoGebra-verkefni 15% og loks hópverkefni, kynningar og sjálfsmat samtals 26%.

Í Mjallarskóla er frumsamið útprentað námsefni kennara notað auk annarra verkefna. Vægi efnisþáttanna til einkunnar er nokkuð jafnt. Einungis er eitt hlutapróf sem gildir 20%. Þess utan gilda tímaverkefni og skilaverkefni 36% hvor um sig og lokaverkefni gildir 8% af lokaeinkunn.

Í Stangarskóla fylgir kennsluáætlunin köflum bókarinnar *Upp á punkt* (Kjartan Heiðberg, 2009). Kennsla Írisar tekur að miklu leyti mið af námsbókinni. Í kennsluáætlun er ítarleg upptalning á þeim dæmum sem nemendur eiga að reikna í fyrstu fjórum köflum hennar en farið er yfir níu kafla bókarinnar alls. Íris telur mikilvægt að fylgja námsbókinni og taka efnisþætti fyrir í þeirri röð sem þeir birtast því alltaf sé verið að byggja ofan á grunnatriðin. Fjögur stöðupróf yfir önnina gilda alls 40%. Stangarskóli er sá eini sem hefur lokapróf í áfanganum en það gildir 50%. Uppfylli nemandi hjá Írisi 60% námsmarkmiða að meðaltali yfir önnina getur hann þó kosið að sleppa lokaprófi. Alls byggja 90% loka-einkunnar áfangans í Stangarskóla því á prófum, sem er langtum meira en í hinum skólunum. Í Mjallarskóla og Klukkuskóla birtist þannig meiri áhersla á verkefnavinnu og hóp-vinnu en próf. Vandvirkni nemenda gildir 10% af lokaeinkunn en svo er ekki í hinum skólunum. Sérstaklega er tekið fram að síma má ekki nota sem reiknivélar, sem undirstrikar litla áherslu á stafrænt efni.

Sýnidæmi og lausnir á ólíkum viðfangsefnum upprifjunaráfanganna

Eitt af því sem einkennir viðfangsefni sem beita þarf greinandi hugsun við að leysa er að lausnaleið er ekki fyrirfram gefin eða augljós. Þá geta lausnir verið fleiri en ein. Þannig geta sýnidæmi eða aðgangur að lausnum valdið því að viðfangsefni sem gætu krafist mikillar hugsunar geri það ekki. Þátttakendurnir höfðu ólíka sýn á það hvað þeim þykir gott námsefni í stærðfræði. Í svörum sínum tóku þeir helst mið af því námsefni sem þeir kjósa að nota.

Þau Arna, Birta og Kristinn í Klukkuskóla segjast vera hrifnari af rannsóknartengdum verkefnum en stagl-æfingum (e. drill). Kristinn segir reyndar að þær séu ágætar í og með – eitt útiloki ekki annað. Arna bætir þó við að almennt séð vilji þau leggja áherslu á krefjandi verkefni. Reynsla hennar er að nemendur gleymi reglum með því að beita þeim endurtekið við að reikna sams konar dæmi „af því að þau vita ekkert hvað þau eru að gera“ en „auðvitað þurfa þau stundum svona drill“. Birta bendir á að blanda viðfangsefna sé góð lausn. Hún vísar í námsvefinn sem þau hafa hannað og segir að þar séu æfingadæmi með endurgjöf sem þau ætlist til að nemendur vinni heima en í skólanum vilja þau frekar leggja fyrir meira krefjandi verkefni. Reyndar vinni nemendur sjaldan æfingadæmin heima.

Birta segist oft hefja kennslustund með sýnidæmi og svo reikni nemendur áfram. Á námsvefnum eru sýnidæmi svo nemendur geti fylgt texta og unnið sjálfstætt. Birta telur

það mikilvægt til að nemendur verði sjálfbjarga. Arna segir að sumt þurfi einfaldlega að útskýra en það gleðji þegar nemendur bjarga sér án aðstoðar með hjálp sýnidæma. Á námsvefnum koma lausnir inn smátt og smátt. Kristinn segir þó að þegar út í lífið sé komið séu hvergi svör aftast í neinni bók. Auk þess er stundum ekkert eitt svar, stundum eru þau jafnvel óendanlega mörg, til dæmis við skapandi verkefni. Arna bætir við að það sé ekki svarið sjálft sem skipti máli heldur hvernig nemendur fái svarið. Þannig leggur hún áherslu á lausnarferli fremur en niðurstöðu.

Friðrik segir ekki gott að gefa nemendum reglu til að nota við úrlausn viðfangsefna. Þá sitji engin hæfni eftir. Suma nemendur telur hann vera vana að fá aðferð gefna og stórt dæmasafn sem þeir geta „púslað“ inn í án mikillar umhugsunar. Það segir hann að sé „ömurleg stærðfræðikennsla“. Hann er hrifnari af því að nemendur leysi nokkur einfaldari dæmi sjálfir og séu svo beðnir að finna reglu og alhæfa út frá henni. Tilfinning hans er sú að það sé gott að byrja á rannsakandi viðfangsefnum en svo sé í lagi að „drilla pínulítið“ til að festa uppgötvuðu regluna í sessi. Góð dæmi fái nemendur til að vilja leysa þau en það fari mikið eftir nemendahópnum hvers konar dæmi það eru. Nemendur þurfi að skynja einhvern tilgang með því að geta leyst dæmið. Friðrik vill leggja fyrir viðfangsefni þar sem nemendur þurfa að ræða saman, rökstyðja og standa fyrir máli sínu. Þá nefnir hann mikilvægi þess að við úrlausn verkefna öðlist nemendur sjálfstraust í stærðfræði. Þar skipti viðmót og hegðun kennarans miklu máli.

Friðrik gefur sjaldan lausnir á verkefnum. Þannig eru verkefnaheftin hans uppbyggð. Hann ræðir frekar við hópinn og gengur á milli nemenda til að kanna hvort þeir séu á rétttri leið. Hann er hrifinn af hugmyndinni um munnlegt leiðsagnarmat þar sem nemendur sýna hvernig þeir leysa tiltekin viðfangsefni. Hann segir að þegar aðeins ein lausn virki sé það í lagi að lausnir séu aðgengilegar en við skapandi verkefni geti það verið hættulegt.

Friðrik segist nota sýnidæmi í auknum mæli, sérstaklega þar sem yfirferð er hröð eins og á náttúrufræðibraut. Hann telur það hjálpa nemendum að verða sjálfstæðir og geta unnið verkefni á mismunandi stöðum í efninu. Með þessu móti geti nemendur unnið hraðar, rannsakað og gert athuganir sjálfir. Hann er þó á móti því að nota sýnidæmi með myndböndum því þá fái nemendur of mikla forskrift.

Íris er á þeirri skoðun að nemendur í upprifjunaráfanga verði að hafa einföld og skýr sýnidæmi. Mikilvægt sé að sýnidæmin séu svipuð dæmunum sem á eftir koma svo nemendur geti leyst þau sjálfir. Hún hefur búið til myndbönd með sýnidæmum svo nemendur geti skoðað leiðbeiningar kennara þegar þeim hentar. Að hennar mati eiga þessir nemendahópar mjög erfitt með að lesa texta og þeir þurfi myndrænt efni þar sem „reglurnar og efnið er einfalt upp sett. Mér finnst þau þurfa meira að reikna dæmi, æfa sig í dæmunum og nota sýnidæmi.“ Hún segist ekki viss um það hvort krefjandi viðfangsefni „reynist þeim einfaldara“. Hún áætlað að um 10–15% nemenda hennar gætu komist í gegnum svona efni á þann hátt sem hún telur æskilegt. Hún telur prósentuna í næsta áfanga nær 50%. Þar hafi nemendur „aðeins meiri rökhugsun og skilning á þessu öllu saman, geta hugsað aðeins út fyrir kassann“. Í upprifjunaráföngunum hjá henni séu þó „rosalega góðir og samviskusamir nemendur inn á milli sem ættu örugglega alveg auðvelt með þetta, en svo standa hinir einhvern veginn upp úr, þessir erfiðu“. Að hennar mati myndu krefjandi viðfangsefni henta betur blandaðri nemendahópum.

Írisi þykja sýnidæmi mjög mikilvægur hluti af námsefni og endurspeglar námsefnið sem hún notar þá skoðun. Þar eru engin dæmi sem hafa fleira en eitt svar. Lausnir eru aftast, sem henni þykir mjög mikilvægt til að nemendur sjái hvort þeir séu á réttri leið og þurfi því síður að biðja um aðstoð.

Viðfangsefni í upprifjunaráföngum í stærðfræði

Ljóst er að viðmælendurnir hafa ekki allir sömu skoðanir á því hvers konar námsefni sé heppilegt fyrir upprifjunaráfanga. Eftir að þeir höfðu lagt fyrir verkefni sem reyna á rök hugsun voru þeir spurðir hvort þeir gætu hugsað sér námsefni sem myndi að mestu samanstanda af slíkum viðfangsefnum. Allir höfðu óbreytt viðhorf.

Kennararnir í Klukkuskóla segjast geta hugsað sér það. Þó þeir segi að á námsvef þeirra sé að finna mörg krefjandi viðfangsefni telja þeir stagl-æfingar heppilegar í bland. Birta sagði að það þyrfti að þjálf hugsunina til að festa hana. Arna segir að mikilvægast sé að nemendur skilji efnið og „þau skilja þetta ekkert með endalausum drilli“. Það sé nóg að taka um 5–7 ólík þjálfunardæmi, ekki ólíkt því sem gert er á vef *Khan Academy*. Hún telur vera ríka hefð fyrir því að nota „drill“-æfingar svo það sé erfitt að sleppa hendinni af þeim alfarið. Kristinn tekur undir þetta.

Friðrik leggur oft krefjandi viðfangsefni fyrir nemendur og segist eiginlega ekki geta hugsað sér annað. Hann telur nemendur læra mikið af því að leysa slík verkefni. Þó telur hann að í áföngum á efri stigum framhaldsskólans, til dæmis þar sem fengist er við markgildi og diffrun, þurfi að leiðbeina og skýra vel út fyrir nemendum. Almennt séu nemendur hrifnari af því að vinna nokkur einföld dæmi og leiða svo út almenna reglu en öfugt. „Þá fá þau bara tilfinningalega tengingu við verkefnið, að glíma við það, í staðinn fyrir að geta glímt við það hugsunarlaust.“ Hann telur þó að nemendum finnist oft þægilegra að fá æfingadæmi þar sem nota þarf gefna reglu við úrlausn:

Þeim finnst það ekkert skemmtilegt en þau kunna það. Og skilja það á meðan þau eru að gera það en það situr ekkert eftir. Þú getur í næstu viku komið með dæmi af svipuðum toga og þau muna ekkert hvað þau voru að gera af því að þau gátu einhvern veginn slökkt á sér og raðað inn í formúluna sem var efst á blaðinu. Þannig að fá þau til að hugsa, sjálf að búa til dæmi, sjálf að setja fram reglu, það neyðir þau til að hugsa.

Íris er ekki sannfærð um að hún geti hugsað sér námsefni fyrir upprifjunaráfanga sem myndi að mestu samanstanda af krefjandi viðfangsefnum. Hún telur að nemendahóparnir þyrftu mjög mikla aðstoð við verkefnið. Orðin flækist fyrir þeim og það þyrftu að vera fleiri dæmi: „Þá væru þau að reikna meira. Mér finnst að endurtaka alltaf svipuð dæmi aftur og aftur að þá læra þau betur. Mín reynsla er allavega sú að það þurfi alltaf bara að æfa sig og gera aftur og aftur.“ Ekki búi allir nemendur hennar yfir óhlutbundinni hugsun og geti því sumir ekki hugsað á óhlutbundinn hátt. Athyglisbrestur, lesblinda eða aðrir örðugleikar eigi þátt í að koma í veg fyrir að þeir geti tekist á við þá tegund viðfangsefna að mati hennar.

Hún sér ekki fyrir sér að nemendur hennar geti svarað spurningum sem reyni á þeirra eigin útskýringar og alhæfingar. Hún telur engan hafa útskýrt eða alhæft í nýliðinni kennslustund. Nemendur skilji einfaldlega ekki spurninguna. „En þegar þau eru komin

aðeins lengra held ég í stærðfræðinni eða ef þetta væru nemendur sem eiga ekki svona erfitt með stærðfræðina, þá held ég að þetta væri mikið einfaldara og betra fyrir þau.“ Viðhorf hennar til stærðfræðináms er að það sé „endalaus æfing, bara eins og að læra á píanó eða eitthvað. Þannig að ég tel að endurtekningar séu mjög mikilvægar í stærðfræði ... bara þjálfun.“

SAMANTEKT OG UMRÆÐA

Markmið rannsóknarinnar var að varpa ljósi á viðhorf framhaldsskólakennara til þess hvort viðfangsefni sem beita þarf gagnrýninni og skapandi hugsun við að leysa henti nemendum í upprifjunaráföngum. Hér ræðum við þau viðhorf sem fram komu í fræðilegu ljósi, tengsl venslaskilnings og tækniskilnings og þau tækifæri og áskoranir sem felast í skapandi og krefjandi vinnu með nemendum.

Eitt af því sem greinir á milli kennaranna er val þeirra á námsefni. Íris sker sig þar úr því hún er eini kennarinn sem tekur mið af einni námsbók við skipulag áfanga síns en hinir kennararnir nota frumsamið efni og efni af veraldarvefnum í námslotum skilgreindum af þeim sjálfum. Ef til vill er þetta birtingarmynd skorts á námsefni á íslensku sem samið er með hliðsjón af áherslum í nýrri aðalnámskrá (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014). Skipulag Írisar svipar til þess sem fram kom í rannsókn Viholainen o.fl. (2015) á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum í Finnlandi þar sem kennarar fylgja efnistöfum námsbókanna og nota sýnidæmi úr þeim til að útskýra það efni sem nemendur eiga að glíma við.

Bæði kennararnir í Klukkuskóla og Friðrik töldu æfingar sem reyna á tækniskilning einungis heppilegar eftir að venslaskilningur hefur verið byggður upp með verkefnum sem reyna á gagnrýna og skapandi hugsun (Hiebert og Carpenter, 1992; Skemp, 1976). Pesek og Kirshner (2000) benda á að víxlun á þessari röð geti truflað þróun dýpri skilnings. Í námsbókum er röðin gjarnan þannig að viðfangsefni þar sem lausnarferlið krefst greinandi hugsunar eru við lok kafla á eftir þeim sem minna reynir á að leysa. Rannsóknir hafa bent til meiri námsárangurs og betri yfirfærslu á raunverulegar aðstæður þegar mikil áhersla er á venslaskilning (Boaler, 1999; Stein o.fl., 2009). Nánari rannsókn á námsárangri þegar venslaskilningur kemur á undan tækniskilningi er þó þörf (Rittle-Johnson o.fl., 2015). Vandinn er sá að meira reynir á hæfni kennara við að útfæra slík verkefni í skólastofunni (Henningsen og Stein, 1997).

Frekari rannsókn er þörf á því hvernig stuðla má að því að kennarar dragi ekki úr kröfum til nemenda sinna með því að einfalda verkefni, til að mynda með aðgengi að ítarlegum lausnum (sjá til dæmis Norton og Kastberg, 2012; Wang o.fl., 2013). Íris hefur minni sérþekkingu á sviði stærðfræðimenntunar en hinir þátttakendurnir og var heldur ekki von að leggja fyrir verkefni sem beita þarf gagnrýninni og skapandi hugsun við að leysa. Viðhorf hennar kemur heim og saman við tilhneigingu kennara með minni sérþekkingu til að gera litlar kröfur til nemenda. Það krefst bæði mikillar stærðfræðilegrar og kennslufræðilegrar þekkingar að vinna að slíkum verkefnum með nemendum (Kilpatrick o.fl., 2001; Wilhelm, 2014). Það helgast af því að framsetning kennara skiptir meira máli en viðfangsefnin sjálf (Stein o.fl., 2009; Stigler og Hiebert, 1999). Huga þarf því vel að vægi stærðfræðimenntunar í kennaranámi til að tryggja að kennarar öðlist þekkingu og

reynslu til að beita kennsluáðferðum sem byggja á rannsóknum og kenningum um stærðfræðinám (Niss og Jensen, 2002).

Íris taldi lausnir einnig mikilvægan hluta af námsefni en Friðrik hafði engar lausnir í sínu námsefni. Klukkuskólakennararnir töldu að lausnir gætu stuðlað að því að byggja upp skilning og lögðu almennt meiri áherslu á ferli en svar, sem er í samræmi við breyttar áherslur í stærðfræðinámi á síðustu áratugum (Skott, 2004). Velta má fyrir sér hvort heppilegast sé að lausnir séu alltaf aðgengilegar eða einungis eftir að verkefni er lokið. Háttur kennarans á námsmati hefur þar eflaust áhrif, til dæmis hvort leiðsagnarmat er notað eða ekki. Mögulega fer það einnig eftir því hvert eðli viðfangsefnanna er og jafnvel hvaða efnisþætti er um að ræða. Oft er fleiri en ein lausn á skapandi og opnum viðfangsefnum.

Þá var greinanlegur munur á því hvernig Friðrik og Íris spyrja spurninga. Friðrik spyr opinna spurninga og leitar rökstuðnings frá nemendum en Íris lokaðra spurninga í leit að einu ákveðnu svari á borð við: „Hvaða eina tala getur verið hérna?“ Lokaðar spurningar af þessu tagi þykja ekki vænlegar til þess að skapa umræður meðal nemenda eða fólks almennt (Good og Brophy, 2008; Henning, 2008). Raunar benda nýlegar rannsóknir í íslenskum skólum til þess að samræður um stærðfræði séu ekki algengar í stærðfræðikennslustundum (Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir, 2014; Savola, 2010). Friðrik stefndi að því að efla hugrekki nemenda í stærðfræði og trú á eigin getu á meðan Íris lagði meiri áherslu á að nemendur yrðu sjálfstæðir með því að nota sýnidæmi til að halda áfram í bókinni og skapar þannig jarðveg fyrir það að þeir séu í samþykkingum (Mason og Johnston-Wilder, 2006). Hún virðist vera í þeim hópi stærðfræðikennara sem sjá sköpun og stærðfræði sem aðskilin fyrirbæri þó að talið sé að unglingar þurfi í auknum mæli á skapandi viðfangsefnum að halda í skólastarfi, sérstaklega nú, þar sem sköpun er ein af grunnstoðum menntunar (Guðbjörg Pálsdóttir og Sriraman, 2017; Ingvar Sigurgeirsson o.fl., 2014; Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2012).

Hjá Írisi mátti greina töluverða áherslu á æfingu og þjálfun þó að slík viðfangsefni ein og sér þyki ekki veita nemendum tækifæri til náms við hæfi (Boaler, 2011). Hún hefur þá skoðun að nemendur læri best með sýnidæmum og þjálfun í aðferðum án þess að skilja hvað liggur að baki og stefnir þannig fyrst og fremst að tækniskilningi (Skemp, 1976). Hún taldi engan nemenda sinna hafa getað svarað verkefnablöðunum með eigin útskýringu eða alhæfingu. Spyrja má hvort „þessa erfiðu nemendur“ sem Íris vísaði gjarnan til skorti stuðning, ef til vill frá heimili til jafns við skóla, við að tileinka sér vaxtarsjálft umfram festusjálft til að öðlast sjálfstraust til að ná árangri í stærðfræði (Blackwell o.fl., 2007; Yeager og Dweck, 2012).

Mikilvægt er að nemendur hafi forsendur til að kljást við viðfangsefni sem þeim er ætlað að leysa. Um leið þarf námsefnið að vera krefjandi og hæfa þroska nemenda. Líkur eru á því að flestir sem sitja upprifjunaráfanga séu komnir á síðasta stig vitsmunalegs þroska (Piaget, 1964). Íris og kennararnir í Klukkuskóla töldu að ekki væru allir nemendur þeirra komnir á það stig óhlutbundinnar hugsunar en eðlilegt er að einhverjir nemendur séu það ekki (Arnett, 2013). Íris taldi jafnframt námsörðugleika á borð við lesblindu og athyglisbrest koma í veg fyrir að þeir gætu leyst viðfangsefni. Þeir nemendur hafa samt sem áður gagn af því að aðstæður séu skapaðar til að öðlast hæfni sem nýtist til þátttöku í samfélaginu og hafa ef til vill ekki síst þörf fyrir að glíma við skapandi viðfangsefni.

Hafa þarf í huga að viðmið Steins og Smiths (1998) skilgreina eðli viðfangsefna út frá því hvernig þau eru sett fram í námsefni og útfærð af kennurum en ekki hvernig þau eru túlkuð af nemendum. Í frekari rannsóknum á þessu sviði mætti skoða sérstaklega hlutverk kennarans í félagslegu umhverfi skólastofunnar (Cobb og Yackel, 1996). Starf kennara hefur tekið miklum breytingum á síðari árum og reynir á aðra hæfni í krefjandi og skapandi vinnu (Hiebert o.fl., 1997; Kristín Bjarnadóttir, 2011). Það er á ábyrgð kennarans að skipuleggja kennslu sem stuðlar að framförum nemenda og í fagmennsku hans felst að velja þá gerð viðfangsefna sem hentar hverju sinni. Með því að leggja fyrir nemendur viðfangsefni sem reyna á skapandi hugsun eru þeim sköpuð tækifæri til að sýna frumkvæði og öðlast innsýn í eðli stærðfræðinnar (Mason og Johnston-Wilder, 2006). Vinnu-aðstæður og tímatakmarkanir geta komið í veg fyrir slíka vinnu, þó umdeilanlegt sé hvort aukinn tíma þurfi (Foley o.fl., 2012; Pesek og Kirschner, 2000). Það er vert að spyrja hvort ekki sé nauðsynlegt að gefa nemendum tækifæri til að stunda nám með venslaskilning að leiðarljósi og hvort eigi að veða hærra, gæði námsþátta eða magn þeirra.

LOKAORÐ

Fjórir af fimm þátttakendum í rannsókninni eru hlynntir því að nemendur í upprifjunar-áföngum glími við skapandi viðfangsefni sem reyna á gagnrýna hugsun. Kennararnir voru þó allir sammála um að slíkir nemendahópar hafi forsendur til að nota námsefni sem byggir á þannig verkefnum. Friðrik er dæmi um kennara sem notar þannig námsefni. Kennararnir vilja þó fjölbreytni í eðli viðfangsefna og að slík viðfangsefni séu tvinnuð við minna krefjandi efni.

Eðli stærðfræði sem fræðigreinar og námsgreinar hefur breyst með tilkomu tölva og upplýsingatækni. Margt bendir til þess að nýir tímar og nýlega breytt námskrá framhaldsskóla kalli á nýja nálgun í námsefni fyrir kennara og nemendur í öllum námsgreinum. Samfélag á 21. öldinni kallar frekar eftir ríkum sköpunarkrafti og útsjónarsemi fólks en hæfileikum í vélrænum aðgerðum eða eyðufyllingum. Æ fleiri störf sem byggja á vélrænum aðgerðum eru nú unnin af tölvum. Hefðbundin reikningsdæmi er auðveldlega hægt að leysa með forritum sem sýna jafnvel öll skrefin í átt að svarinu. Rétt svar nemenda er merkingarlaust ef þeir fá ekki að sýna fram á skilning sinn og enn fremur tækifæri til að dýpka hann. Skólastarf ætti því að undirbúa virka þátttakendur í samfélaginu með því að veita þeim tækifæri til að styrkja sköpunarkraft sinn og gagnrýna hugsun.

Velta má fyrir sér hvar mörkin liggja: Hvenær skilgreinir kennari hugtök og hvenær hvetur hann nemendur til að rannsaka hvað í þeim felst? Ef til vill er það hluti af listinni við kennarastarfið að draga línuna milli þess hvað er „nógu einfalt“ til að nemendur geti rannsakað eða leitt út upp á eigin spýtur og þess hvað á einfaldlega að skýra út fyrir nemendum á hefðbundinn máta. Stærðfræðiáfangar þar sem nemendur fá ekki tækifæri til að skilja að stærðfræði er fræðigrein sem byggist á hugmyndum sem tengjast hver annarri gefa ekki rétta mynd af því hvað stærðfræði er í raun og veru. Slík nálgun getur jafnvel fælt frá nemendur sem hefðu áhuga á að ná tókum á tungumáli alheimsins – stærðfræði.

Niðurstöður rannsóknarinnar varpa ljósi á þær breytingar sem orðið hafa á því hvers konar viðfangsefni framhaldsskólakennarar óska eftir í stærðfræðinámsefni hér á landi.

Núverandi námsbækur eru margar komnar til ára sinna og tóku mið af annarri námskrá og kennsluskipulagi en nú er í gildi. Sköpun og öðrum grunnstoðum menntunar þarf að gera hátt undir höfði í stærðfræði, ekki síst hjá nemendum sem þurfa á aukinni aðstoð að halda við að ná hæfniviðmiðum grunnskólastigsins í upprifjunaráföngum fyrir áframhaldandi nám í framhaldsskóla. Til er margs konar erlent efni þar sem stærðfræði er birt sem hagnýt og lifandi grein með samtengdum hugtökum. Hvetja má til aukinnar þróunar námsefnis á íslensku sem byggir á þörfum nemenda og kennara, er í takt við þá tíma sem við lifum á og veitir komandi kynslóðum aukin tækifæri til að öðlast hæfni til þátttöku í samfélagi framtíðarinnar.

ATHUGASEMDIR

- 1 Í greininni er talað um krefjandi viðfangsefni sem reyna á gagnrýna og skapandi hugsun að leysa. Á ensku er „cognitively demanding tasks“ oft notað um slík viðfangsefni. Sumir kennarar kölluðu slík viðfangsefni rannsóknartengd.
- 2 Spurningalista viðtalanna í heild sinni má finna í viðauka meistararitgerðar fyrri höfundar (Jóhann Örn Sigurjónsson, 2016).
- 3 Verkefnablöðin má finna í viðauka meistararitgerðar fyrri höfundar (Jóhann Örn Sigurjónsson, 2016).

HEIMILDIR

- Anna Helga Jónsdóttir, Eggert Briem, Freyja Hreinsdóttir, Freyr Þórarinnsson, Jón Ingólfur Magnússon og Rögnvaldur G. Möller. (2014). *Úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum*. Reykjavík: Mennta- og menningarmálaráðuneytið.
- Arnett, J. J. (2013). *Adolescence and emerging adulthood: A cultural approach* (5. útgáfa). Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.
- Blackwell, L. S., Trzesniewski, K. H. og Dweck, C. S. (2007). Implicit theories of intelligence predict achievement across an adolescent transition: A longitudinal study and an intervention. *Child Development*, 78(1), 246–263. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.00995.x>
- Boaler, J. (1999). Participation, knowledge and beliefs: A community perspective on mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 259–281. <https://doi.org/10.1023/a:1003880012282>
- Boaler, J. (2011). Changing students' lives through the de-tracking of urban mathematics classrooms. *Journal of Urban Mathematics Education*, 4(1), 7–14.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Cobb, P. og Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3–4), 175–190. <https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265>

- Foley, G. D., Khoshaim, H. B., Alsaeed, M. og Nihan Er, S. (2012). Professional development in statistics, technology, and cognitively demanding tasks: Classroom implementation and obstacles. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(2), 177–196. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2011.592616>
- Good, T. L. og Brophy, J. E. (2008). *Looking in classrooms* (10. útgáfa). Boston: Pearson.
- Grave, I. og Pepin, B. (2015). Teachers' use of resources in and for mathematics teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 199–222.
- Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir. (2015). Instructional practices in mathematics classrooms. Í K. Krainer, og N. Vondrová (ritstjórar), *CERME 9 – Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (bls. 3036–3042). Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education og ERME.
- Guðbjörg Pálsdóttir og Sriraman, B. (2017). Teachers' views on modeling as a creative mathematical activity. Í R. Leikin og B. Sriraman (ritstjórar), *Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond* (bls. 47–55). Dordrecht: Springer.
- Henning, J. E. (2008). *The art of discussion-based teaching: Opening up conversation in the classroom*. New York: Routledge.
- Henningsen, M. og Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524–549. <https://doi.org/10.2307/749690>
- Hiebert, J. og Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Í D. A. Grouws (ritstjóri), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (bls. 65–97). New York: Macmillan.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., . . . Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth: Heinemann.
- Ingvar Sigurgeirsson, Amalía Björnsdóttir, Gunnhildur Óskarsdóttir og Kristín Jónsdóttir. (2014). Kennsluhættir. Í Gerður G. Óskarsdóttir (ritstjóri), *Kennsluhættir í grunnskólum við upphaf 21. aldar* (bls. 113–160). Reykjavík: Háskólaútgáfan.
- Jóhann Örn Sigurjónsson. (2014). *Vitsmunalegar kröfur námsefnis í upprifjunaráföngum framhaldsskóla í stærðfræði: Greining á stærðfræðilegum viðfangsefnum í námsefni upprifjunaráfanga* (óútféfin bakkalárritgerð). Sótt af <http://hdl.handle.net/1946/19010>
- Jóhann Örn Sigurjónsson. (2016). *Hentar seinfærum nemendum í stærðfræði að vinna verkefni í hlutverki stærðfræðinga?* (óútféfin meistaráritgerð). Sótt af <http://hdl.handle.net/1946/26033>
- Kilpatrick, J., Swafford, J. og Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.
- Kjartan Heiðberg. (2009). *Upp á punkt: Upprifjun grunnþátta í stærðfræði*. Reykjavík: Iðnú.
- Kristín Bjarnadóttir. (2011). Stærðfræði 102 í fjölbrautaskóla: Vandí og ávinningur. *Netla – Veftímarit um uppeldi og menntun*. Sótt af <http://netla.hi.is/greinar/2011/ryn/008.pdf>

- Mason, J. og Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans: Tarquin.
- Menntamálaráðuneytið. (1999). *Aðalnámskrá framhaldsskóla: Stærðfræði 1999*. Reykjavík: Höfundur. Sótt af <http://brunnur.stjr.is/mrn/utgafuskra/utgafa.nsf/SearchResult.xsp?documentId=609EF922C9B70531002576F00058D4C7>
- Mennta- og menningarmálaráðuneytið. (2012). *Aðalnámskrá framhaldsskóla 2011: Almennur hluti*. Reykjavík: Höfundur.
- Mertens, D. M. (2010). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative and qualitative approaches* (3. útgáfa). Thousand Oaks: SAGE.
- Niss M. og Jensen, T. H. (ritstjórar). (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Kaupmannahöfn: Undervisningsministeriet. Sótt af <http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf>
- Norton, A. og Kastberg, S. (2012). Learning to pose cognitively demanding tasks through letter writing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 109–130. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9193-9>
- Pesek, D. D. og Kirshner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 524–540. <https://doi.org/10.2307/749885>
- Piaget, J. (1964). *The psychology of intelligence*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Resnick, L. B. og Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M. og Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587–597. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x>
- Savola, L. (2010). Structure of Finnish and Icelandic mathematics lessons. Í B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, Guðbjörg Páldóttir, B. Dahl og L. Haapasalo (ritstjórar), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education* (bls. 519–538). Charlotte: Information Age Publishing.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77(4), 20–27.
- Skott, J. (2004). The forced autonomy of mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1–3), 227–257. <https://doi.org/10.1023/b:educ.0000017670.35680.88>
- Solomon, Y. (2009). *Mathematical literacy: Developing identities of inclusion*. New York: Routledge.
- Stein, M. K. og Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. og Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development* (2. útgáfa). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stigler, J. W. og Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: The best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

- Viholainen, A., Partanen, N., Piironen, N., Asikainen, M. A. og Hirvonen, P. E. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: Theory examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3-4), 157–178.
- Wang, C., Polly, D., Lehew, A., Pugalee, D., Lambert, R. og Martin, C. S. (2013). Supporting teachers' enactment of elementary school student-centered mathematics pedagogies: The evaluation of a curriculum-focused professional development program. *New Waves*, 16(1), 76–91.
- Wilhelm, A. G. (2014). Mathematics teachers' enactment of cognitively demanding tasks: Investigating links to teachers' knowledge and conceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(5), 636–674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.5.0636>
- Yeager, D. S. og Dweck, C. S. (2012). Mindsets that promote resilience: When students believe that personal characteristics can be developed. *Educational Psychologist*, 47(4), 302–314. <https://doi.org/10.1080/00461520.2012.722805>

Greinin barst tímaritinu 30. ágúst 2017 og var samþykkt til birtingar 6. apríl 2018

UM HÖFUNDANA

Jóhann Örn Sigurjónsson (jos34@hi.is) hefur sinnt kennslu frá árinu 2013. Hann lauk B.Ed.-prófi í faggreinakennslu í grunnskóla frá Háskóla Íslands og meistaraþrófi af stærðfræðikjörsviði Menntavísindasviðs sama skóla árið 2017. Hann stundar nú nám í reikni-fræði. Hann hefur starfað sem grunnskólakennari, stundakennari í Háskóla Íslands og einnig stundað alþjóðlegt meistaranám í menntarannsóknum við Háskólann í Gautaborg. Rannsóknaráhugi hans snýr að stærðfræðinámi, námsefni og þróun stærðfræðikennslu.

Jónína Vala Kristinsdóttir (joninav@hi.is) er dósent í stærðfræðimenntun við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hún var bekkjarkennari í grunnskóla í 20 ár, hefur skrifað námsefni í stærðfræði fyrir miðstig grunnskóla og unnið að námskrágerð í stærðfræði. Hún kennir grunn- og framhaldsnámskeið í kennaradeild, einkum um stærðfræðimenntun. Rannsóknarsvið hennar tengist stærðfræðinámi og -kennslu í skóla án aðgreiningar. Hún lauk doktorsnámi í menntunarfræðum haustið 2016 og fjallaði rannsókn hennar um samvinnurannsókn með bekkjarkennurum í grunnskóla með áherslu á stærðfræðinámi og -kennslu nemenda með ólíkar forsendur til náms.

Upper secondary school remedial courses: Creative and demanding tasks or drills

ABSTRACT

This study explores the views of teachers in upper secondary schools on creative and demanding mathematical tasks and whether they find that students in remedial courses have the grounds to improve their mathematical competency with such tasks. In the national curriculum for upper secondary school increased emphasis is placed on students acquiring the skills in mathematical, critical and creative thinking (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2012) necessary to face the challenges of the 21st century where jobs will require resourcefulness and creativity rather than knowing how to follow directions mechanically. Therefore, it is important for students to work on tasks in their education where those skills can be honed.

In mathematics teaching emphasis can be placed on either relational understanding or instrumental understanding (Skemp, 1976; Hiebert & Carpenter, 1992). A framework for analyzing whether solving mathematical tasks requires relating mathematical concepts to one another or not was used (Stein et al., 2009). Research suggests that teacher competency is critical in implementing tasks in which a solution requires higher order thinking so that teachers do not do too much of the thinking for students (Henningsen & Stein, 1997; Stigler & Hiebert, 1999; Kilpatrick et al., 2001; Niss & Jensen, 2002).

Five participants teaching remedial courses in mathematics from three upper secondary schools were interviewed, both before and after they assigned tasks to their students where the search for a solution required both critical and creative thinking. Solving the mathematical tasks created for the research required an understanding of the equality sign and students' own generalizations about inverses and identities in both addition and multiplication from results of simple calculations. Course syllabuses were also analyzed. The research question is: What are the views of Icelandic mathematics teachers of tasks in which a solution requires critical and creative thinking of students in remedial courses?

The key findings were that the teachers generally considered students in remedial courses to have the necessary skills to be able to learn from working on such tasks. Many mentioned the importance of task diversity. Demand was apparent for a collaborative moderated platform on the web where teachers can share materials with one another. Only one teacher thought such cognitively demanding tasks were unsuitable for low-achieving students.

Suggestions were made about how learning materials of this nature could be weaved together with less demanding tasks but more research is needed concerning the most suitable order of different types of tasks (Rittle-Johnson et al., 2015; Pesek & Kirshner, 2000). Differing viewpoints emerged about the use of solutions and example tasks that show procedures without connections to other mathematical ideas. Evidence suggests that there is a shortage of tasks in Icelandic upper secondary school learning materials in which a solution requires mathematical thinking and reasoning (Anna Helga Jónsdóttir et al., 2014).

The nature of mathematics as a discipline and as a school subject has changed with the rapid evolution of computers and information technology. Traditional drill exercises can easily be solved with apps that even show all the steps to the correct answer. A student's correct answer is meaningless if an opportunity to demonstrate understanding is not given.

21st century society requires citizens rich in creativity and resourcefulness, as opposed to ability to handle mechanical procedures. Schooling should increasingly prepare future citizens with tasks in which a solution requires creative and critical thinking. Perhaps the art of being a mathematics teacher lies in drawing the line between when to define a concept in a traditional way and when to encourage students to explore and discover it themselves.

The results of this study highlight changes that have taken place in the kinds of tasks upper secondary school teachers want to see in Icelandic mathematics learning materials. Current textbooks are old and were published when a different curriculum was in force and designed for teaching methods that were in line with norms at that time. Creativity has been increasingly emphasised in the national curriculum and needs to become a significant part of mathematics learning, especially for students who need additional assistance to acquire the expected mathematics learning outcomes of the lower secondary school. Increased development of learning materials in Icelandic should be encouraged; these should build on the needs of students and teachers, be in line with the times we live in and give students an opportunity to acquire the necessary skills for participating in the society of tomorrow.

Keywords: mathematics education, remedial courses, upper secondary school, mathematical tasks, creativity

ABOUT THE AUTHORS

Johann Orn Sigurjonsson (jos34@hi.is) has been a teacher since 2013. He has a B.Ed. degree in mathematics teaching from the University of Iceland and completed a master's degree specializing in mathematics education from the same university's School of Education in 2017. He now studies computational engineering. He has worked as a lower secondary school teacher, assistant teacher at the University of Iceland and he has also been part of an International Master's Programme in Educational Research at the University of Gothenburg. His research interests are mathematics learning, learning materials and the development of mathematics teaching.

Jonina Vala Kristinsdottir (joninav@hi.is) is an associate professor in mathematics education at University of Iceland, School of Education. She was a teacher in primary grades for 20 years and she has participated in writing curricula and textbooks in mathematics. Her main teaching responsibilities are within the teacher education program in mathematics teaching and general pedagogy. Her research interests are mathematics teaching and learning in inclusive schools. She finished her doctoral degree in 2016. Her thesis was a collaborative inquiry into mathematics teaching with the aim of developing a partnership in researching practice in primary grades and teacher education.